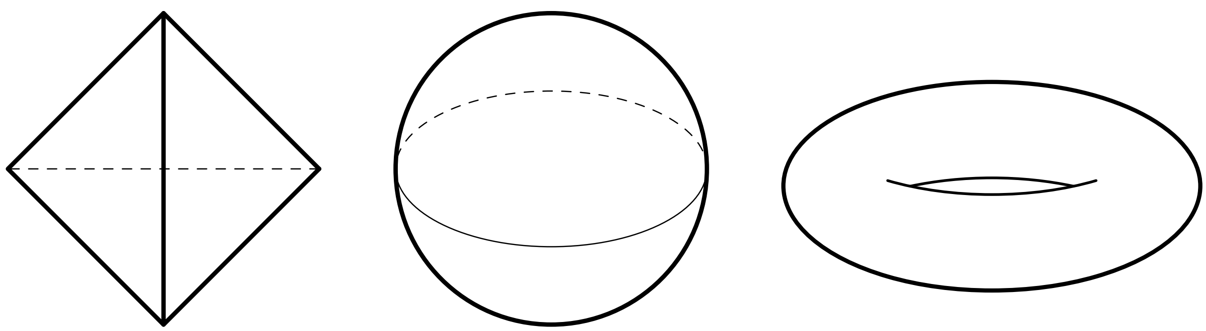
Общая топология

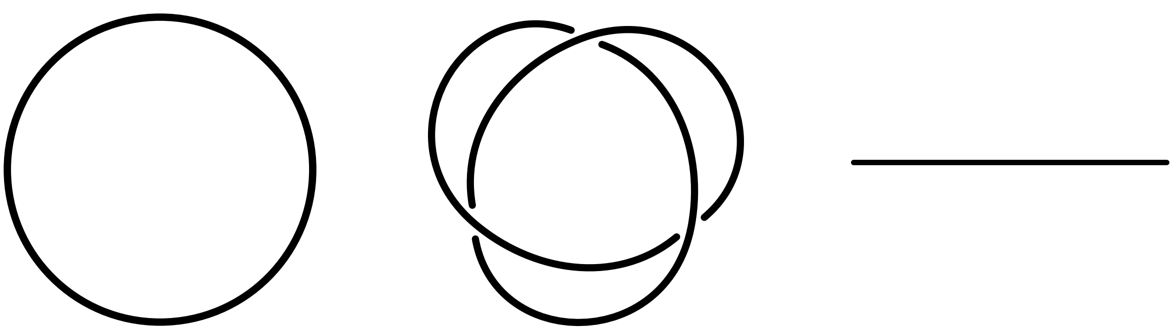
В этом курсе мы изучим начала общей топологии: топологические пространства и непрерывные отображения, базы и предбазы топологии, базы окрестностей точек, пределы, связные пространства и линейно связные компоненты, компактные пространства, фильтры, равномерные структуры и их пополнения, равномерно непрерывные функции.

1. Топологические пространства

Понятие топологического пространства опирается на фундаментальную идею *непрерывности.* Наука, имеющая дело с непрерывностью, называется *топологией.* Следующие рисунки можно интерпретировать как различные топологии на одном и том же множестве.



Поверхность тетраедра, сфера и тор.
Первые два из этих двумерных пространств одинаковы, но отличаются от третьего.



Окружность, узел и отрезок.
Первые два из этих одномерных пространств одинаковы, но отличаются от третьего.

1.1. Определение. *Топологическое пространство* — это множество X с выделенным семейством $\mathcal{T} \subset 2^X$ подмножеств, называемых *открытыми множествами* или попросту *открытыми,* удовлетворяющие следующим условиям:

• само пространство X и его пустое подмножество $\varnothing$ являются открытыми множествами, то есть $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;
• объединение любого семейства открытых множеств является открытым множеством, то есть $\forall \mathcal{S} \subset \mathcal{T} \ \cup \mathcal{S} \in \mathcal{T}$;
• пересечение двух открытых является открытым, то есть $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T} \ U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Семейство $\mathcal{T}$ открытых множеств в X — это и есть *топология* на X.

Когда фиксирована некоторая топология на X, символы $U \subset\!o\, X$ означают фразу "U является открытым в X". Открытое множество, содержащие точку $x \in X$, называется *окрестностью* точки x.

Как мы увидим на следующих примерах, слово *окрестность* дает некое интуитивное представление о том, что из себя представляет данная топология на некотором множестве. Фактически, указывая множества открытые в X, то есть фиксируя топологию на X, мы специфицируем "степень близости" между точками пространства X. Когда точка q находится в окрестности точки p, то q "близка" к p в смысле этой окрестности, а если точка q оказывается в меньшей окрестности точки p, то она становится "ближе" к точке p.

1.2. Пример. Объявим открытыми лишь два подмножества множества X: пустое $\varnothing$ и само X. В этой топологии на X, называемой *тривиальной* или *антидискретной,* каждая точка обладает единственной окрестностью, совпадающей со всем множеством X. Значит, каждая точка является "столь же близкой" к любой другой точке, как к самой себе.

1.3. Пример. Объявим открытыми все подмножества множества X. Эта топология на X называется *дискретной.* Каждая точка является окрестностью самой себя; поэтому все точки "одинаково удалены" одна от другой.

1.4. Пример. На произвольном линейно упорядоченном множестве $(C, \leqslant)$, в котором отсутствуют как наименьший, так и наибольший элементы, имеется топология, связанная с порядком: объявим подмножество $U \subset C$ открытым, если вместе с каждой своей точкой подмножество U содержит некоторый открытый сегмент содержащий эту точку, то есть $C \,o\!\supset U \Leftrightarrow \forall u \in U\ \exists c_1, c_2 \in C\ u \in \,]c_1, c_2[_{\,C} \subset U$. Очевидно открытые сегменты являются открытыми множествами.

1.5. Определение. На произвольном метрическом пространстве (X, d) имеется *топология, порожденная метрикой*: объявим подмножество $U \subset X$ открытым, если вместе с каждой своей точкой подмножество U содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке, то есть $X \,o\!\supset U \Leftrightarrow \forall u \in U\ \exists r > 0\ B(u; r) \subset U$. По умолчанию, каждое метрическое пространство предполагается снабженным такой топологией.

1.6. Упражнение. Проверьте, что семейства открытых множеств, описанные в примере 1.4 и в определении 1.5, удовлетворяют аксиомам топологического пространства.

1.7. Упражнение. Снабдим множество X следующей метрикой: $\mathrm{d}(x_1, x_2) = 0$, если $x_1 = x_2$ и $\mathrm{d}(x_1, x_2) = 1$, если $x_1 \neq x_2$. Какую топологию на X порождает метрика d ?

Разные метрики могут порождать одну и ту же топологию на данном множестве. Вот пример такого явления.

1.8. Пример. *Все метрики L^p для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ определяют на $\mathbb{R}^n$ одну и ту же топологию, называемую* стандартной *топологией на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Легко видеть, что для любых $c, x \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\mathrm{d}_\infty(c, x) \leqslant \mathrm{d}_p(c, x) \leqslant n^{1/p} \cdot \mathrm{d}_\infty(c, x).$$

Для произвольных $c \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, эти неравенства влекут включения

$$B_{\mathrm{d}_p}(c; r) \subset B_{\mathrm{d}_\infty}(c; r) \subset B_{\mathrm{d}_p}(c; n^{1/p} r).$$

Значит, подмножество в $\mathbb{R}^n$ открыто относительно метрики L^p с $p < \infty$ тогда и только тогда, когда оно открыто относительно метрики L^∞ ∎

Если явно не оговорено противное, мы предполагаем на $\mathbb{R}^n$ стандартную топологию.

Не верно, что всякая топология происходит от некоторой метрики.[1] Это значит, что топологическое пространство может не позволять определить на нем количественную дистанцию. Тем не менее, топология дает некоторое качественное представление о близости точек. Как мы увидим в следующем параграфе, формализованное топологией понятие близости точек весьма адекватно при изучении непрерывности функций.

1.9. Упражнение. Пусть X — топологическое пространство. Покажите, что подмножество множества X открыто тогда и только тогда, когда оно содержит некоторую окрестность всякой своей точки.

1.10. Упражнение. Проверьте, что стандартная топология на $\mathbb{R}$ совпадает с топологией, связанной со стандартным линейным порядком на $\mathbb{R}$ (см. пример 1.4).

1.11. Определение. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $C \subset X$ называется *замкнутым множеством* или просто *замкнутым,* если его дополнение открыто, $X \setminus C \subset_o X$ (значит, подмножество открыто, если его дополнение замкнуто). Символы $C \subset_c X$ означают фразу "C является замкнутым в X".

Используя формулы $X \setminus \big(\bigcup_{i\in I} U_i\big) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus U_i)$ и $X \setminus \big(\bigcap_{i\in I} U_i\big) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus U_i)$, справедливые для любого семейства $U_i \subset X$, $i \in I$, подмножеств данного множества X, мы можем переписать аксиомы топологического пространства в терминах замкнутых множеств.

1.12. Замечание. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда*

- *само пространство X и его пустое подмножество $\varnothing$ являются замкнутыми множествами*;
- *пересечение любого семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством*;
- *объединение двух замкнутых является замкнутым* ∎

1.13. Определение. Пусть X — топологическое пространство и пусть $X \supset S$ — подмножество в X. *Замыкание* подмножества S, обозначаемое как $\overline{S}$, — это пересечение всех тех замкнутых множеств, которые содержат подмножество S, то есть $\overline{S} := \bigcap_{S\subset C \subset_c X} C$. *Внутренность* подмножества S, обозначаемая как $\operatorname{Int} S$, — это объединение всех тех открытых множеств, которые содержатся в подмножестве S, то есть $\operatorname{Int} S := \bigcup_{S\supset U \subset_o X} U$.

В силу замечания 1.12, замыкание любого подмножества является замкнутым. Ясно, что замыкание подмножества S — это наименьшее замкнутое множество содержащее S. Аналогично, внутренность любого подмножества S — это наибольшее открытое множество содержащееся в S.

1.14. Упражнение. Пусть $X \supset S_1, S_2$ — подмножества топологического пространства X. Покажите, что

$$S_1 \subset S_2 \Rightarrow \overline{S}_1 \subset \overline{S}_2, \qquad \overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2, \qquad \overline{S_1 \cap S_2} \subset \overline{S}_1 \cap \overline{S}_2,$$

$$S_1 \subset S_2 \Rightarrow \operatorname{Int} S_1 \subset \operatorname{Int} S_2, \quad \operatorname{Int}(S_1 \cup S_2) \supset \operatorname{Int} S_1 \cup \operatorname{Int} S_2, \quad \operatorname{Int}(S_1 \cap S_2) = \operatorname{Int} S_1 \cap \operatorname{Int} S_2.$$

[1] Глупый контрпример — это антидискретная топология из примера 1.2, но имеются и гораздо более изощренные контрпримеры.

Неформально, замыкание $\overline{S}$ подмножества $S \subset X$ состоит из всех тех точек пространства X, которые находятся "сколь угодно близко" к S. Другими словами, справедлива

1.15. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство и пусть $S \subset X$. Тогда замыкание $\overline{S}$ состоит из всех точек $x \in X$, удовлетворяющих следующему свойству: $U \cap S \neq \varnothing$ для всякой окрестности $U \ni x$ точки x, то есть $\overline{S} = \{x \in X \mid \forall U\ x \in U \overset{o}{\subset} X \Rightarrow U \cap S \neq \varnothing\}$.*

Доказательство. По определению замыкания, включение $x \in \overline{S}$ эквивалентно включениям $x \in C$ для всех замкнутых $X \overset{c}{\supset} C \supset S$ содержащих S. Переформулировав это утверждение в терминах открытых дополнений $U := X \setminus C$, мы видим, что включение $x \in \overline{S}$ эквивалентно $x \notin U$ для любого открытого U дизъюнктного с S, то есть $U \cap S = \varnothing$. Эта последняя формулировка эквивалентна в свой черед утверждению леммы ■

1.16. Определение. *Точкой накопления* подмножества $S \subset X$ топологического пространства X называется точка $p \in X$, во всякой окрестности которой имеется бесконечно много точек подмножества S, то есть $\forall U\ p \in U \overset{o}{\subset} X \Rightarrow |U \cap S| = \infty$. Обозначим через $\operatorname{Acc} S$ множество всех точек накопления подмножества S.

1.17. Упражнение.* Докажите, что $\overline{S} = S \cup \operatorname{Acc} S$ для любого подмножества $S \subset X$ топологического пространства X.

2. Непрерывность. Индуцированные топологии

Неформально, функция между двумя топологическими пространствами непрерывна в некоторой точке x, если она отображает точки близкие к x в точки близкие к образу точки x.

2.1. Определение. Функция $f : X \to Y$ между топологическими пространствами считается *непрерывной в точке* $x \in X$, если для всякой окрестности $Y \overset{o}{\supset} V \ni f(x)$ точки $f(x)$ существует окрестность $X \overset{o}{\supset} U \ni x$ точки x такая, что $fU \subset V$. Функция f *непрерывна,* если она непрерывна во *всех* точках $x \in X$.

2.2. Предложение. *Функция $f : X \to Y$ между топологическими пространствами непрерывна тогда и только тогда, когда для всякого открытого (замкнутого) множества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}V \subset X$ тоже является открытым (замкнутым) множеством.*

Доказательство. Сначала предположим, что f непрерывна. Пусть $Y \overset{o}{\supset} V$ — открытое множество. Мы хотим доказать, что $f^{-1}V$ открыто в X. Пусть $x \in f^{-1}V$. Тогда $f(x) \in V$. В силу определения 2.1 существует окрестность $x \in U_x \overset{o}{\subset} X$ такая, что $fU_x \subset V$. Значит, $U_x \subset f^{-1}V$. Мы получили окрестность U_x точки x включенную в $f^{-1}V$. Поскольку точка $x \in f^{-1}V$ произвольна, упражнение 1.9 влечет, что $f^{-1}V$ открыто.

Обратно, предположим, что прообразы всех открытых подмножеств открыты. Пусть $x \in X$ и пусть $f(x) \in V \overset{o}{\subset} Y$ некоторая окрестность точки $f(x)$. Тогда $U := f^{-1}V$ — окрестность точки x такая, что $fU \subset V$.

Аналогичный результат для замкнутых множеств — это прямое следствие формулы $f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}Y \setminus f^{-1}V = X \setminus f^{-1}V$ справедливой для любого подмножества $V \subset Y$ ■

2.3. Упражнение. Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — функции между топологическими пространствами такие, что f непрерывна в точке $x \in X$ и g непрерывна в точке $f(x) \in Y$. Покажите, что композиция $g \circ f : X \to Z$ непрерывна в точке x. Следовательно, композиция непрерывных функций является непрерывной функцией.

2.4. Определение. Непрерывная функция $f : X \to Y$ между топологическими пространствами называется *гомеоморфизмом,* если она биективна и обратная функция f^{-1} тоже непрерывна. Если существует гомеоморфизм между двумя топологическими пространствами, они *гомеоморфны.*

Гомеоморфные пространства можно считать одинаковыми, поскольку гомеоморфизм отождествляет семейства их открытых множеств.

Используя концепцию непрерывности, мы будем теперь изучать фундаментальное понятие *индуцированной топологии.*

2.5. Определение. Пусть $X \xleftarrow{f} Y$ — функция из *множества* Y в *топологическое пространство* X. Определим *индуцированную* топологию на Y, объявляя открытыми в Y прообразы открытых множеств пространства X.

Аксиомы топологического пространства — это прямое следствие формул $f^{-1}\varnothing = \varnothing$, $f^{-1}X = Y$, $\bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}U_i = f^{-1}\big(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\big)$ и $\bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}U_i = f^{-1}\big(\bigcap\limits_{i\in I} U_i\big)$ справедливых для любых подмножеств $U_i \subset X$, $i \in I$.

2.6. Определение. Для данных двух топологий $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subset 2^X$ на множестве X, мы говорим, что топология $\mathcal{T}_1$ *грубее, слабее* или *меньше,* чем топология $\mathcal{T}_2$ (при этом $\mathcal{T}_2$ *тоньше, сильнее* или *больше,* чем $\mathcal{T}_1$), если всякое открытое в топологии $\mathcal{T}_1$ является открытым в топологии $\mathcal{T}_2$, то есть если $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

В силу предложения 2.2, непрерывная функция $f : Y \to X$ между топологическими пространствами остается непрерывной, если мы заменим топологию на Y на более тонкую, или если мы заменим топологию на X на более грубую.

В ситуации определения 2.5, (*наитончайшая*) дискретная топология на Y гарантирует непрерывность функции $f : Y \to X$. Индуцированная же топология на Y является, напротив, *наигрубейшей* гарантирующей непрерывность функции f.

2.7. Упражнение. Докажите, что множество Y снабжено индуцированной топологией относительно функции $X \xleftarrow{f} Y$ в топологическое пространство X в точности, когда справедливо следующее свойство:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f\circ g"'] \arrow[d, "g"] \\ X & Y \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

> Произвольная функция $g : Z \to Y$ из топологического пространства Z непрерывна тогда и только тогда, когда композиция $f \circ g : Z \to X$ непрерывна.

Другими словами, приведенное свойство является характеристическим для индуцированной топологии. Оно называется *универсальным.*

Мы только что индуцировали топологию "в направлении против стрелки". Теперь будем индуцировать топологию "по направлению стрелки".

2.8. Определение. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — функция из *топологического пространства* X в *множество* Y. Определим *индуцированную* топологию на Y, объявляя открытыми в Y те подмножества, чей прообраз открыт в X.

По тем же причинам, что упомянуты после определения 2.5, указанные открытые множества удовлетворяют аксиомам топологического пространства.

Тривиальная (*наигрубейшая*) топология на Y гарантирует непрерывность функции $f : X \to Y$. Индуцированная же топология на Y является, напротив, *наитончайшей* гарантирующей непрерывность функции f.

2.9. Упражнение. Докажите, что множество Y снабжено индуцированной топологией относительно функции $X \xrightarrow{f} Y$ из топологического пространства X в точности, когда справедливо следующее свойство:

> Произвольная функция $g : Y \to Z$ в топологическое пространство Z непрерывна тогда и только тогда, когда композиция $g \circ f : X \to Z$ непрерывна.

$$\begin{tikzcd} & Z \\ X \arrow[ur, "g \circ f"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Другими словами, приведенное свойство является характеристическим для индуцированной топологии. Оно тоже называется *универсальным.*

2.10. Упражнение. Опишите индуцированные топологии на X определенные функциями $\varnothing \to X$ и $X \to *$, где $*$ обозначает одноточечное пространство.

2.11. Упражнение.* Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — функции между топологическими пространствами. Покажите, что если две из трех функций f, g и $g \circ f$ индуцируют топологию по направлению (против направления) стрелок, то и третья тоже. Докажите, что функция g (функция f) индуцирует топологию по направлению (против направления) стрелки, если функции f и g непрерыны, а функция $g \circ f$ индуцирует топологию по направлению (против направления) стрелки.

Рассмотрим теперь четыре важных частных случая индуцированных топологий: топология подпространства, фактор-топология, топология несвязного объединения и топология произведения (тихоновская топология).

2.12. Определение. Пусть X — топологическое пространство и пусть $X \supset S$ — подмножество пространства X. Топология на S, индуцированная функцией включения $\iota : S \hookrightarrow X$, называется *топологией подпространства* на S. Поскольку $\iota^{-1}U = U \cap S$ для любого подмножества $U \subset X$, открытые множества в топологии подпространства — это, по определению 2.5, все множества вида $U \cap S$, где U пробегает все открытые в X.

Подмножество топологического пространства будет рассматриваться как подпространство, то есть как снабженное топологией подпространства, если явно не оговорено противное.

2.13. Упражнение. Покажите, что замкнутые в топологии подпространства $S \subset X$ — это подмножества вида $C \cap S$, где C пробегает все замкнутые в X.

2.14. Определение. *Покрытие* топологического пространства X — это такое семейство подпространств $X_i \subset X$, $i \in I$, что $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$. Подпокрытие этого покрытия — это такое подсемейство X_j, $j \in J$ (где $J \subset I$), которое все еще является покрытием, $X = \bigcup\limits_{j \in J} X_j$. Покрытие называется *открытым* (*замкнутым*), если все X_i, $i \in I$, являются открытыми (замкнутыми) в X.

2.15. Упражнение. Пусть $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие топологического пространства X. Для того, чтобы подмножество $C \subset X$ было замкнутым в X необходимо и достаточно, чтобы подмножество $U_i \cap C$ было замкнутым в U_i для всех $i \in I$, то есть

$C \subset c\, X \Leftrightarrow \forall i \in I\ U_i \cap C \subset c\, U_i$. (Подсказка: $U_i \cap C \subset c\, U_i$ влечет $U_i \setminus C \subset o\, U_i$.) Другими словами, замкнутость — это локальное свойство: оно проверяется локально (в каждом U_i, $i \in I$). Как нетрудно видеть, открытость — это тоже локальное свойство.

2.16. Определение. Пусть X — топологическое пространство и пусть $\sim$ — эквивалентность на X. Топология на фактор-множестве $X/{\sim}$, индуцированная канонической проекцией $\pi : X \to X/{\sim}$, называется *фактор-топологией* и соответствующее пространство называется *фактор-пространством.*

2.17. Упражнение. Рассмотрите замкнутый сегмент $I := [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, как подпространство в $\mathbb{R}$. Обозначим через $\sim$ отношение эквивалентности на I, которое отождествляет концы 0 и 2π сегмента. Покажите, что фактор-пространство $I/{\sim}$ гомеоморфно окружности $\mathbb{S}^1 := \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\big\}$, рассматриваемой как подпространство в $\mathbb{R}^2$.

2.18. Упражнение. Пусть Y_i, $i \in I$, — дизъюнктное семейство топологических пространств. Проверьте, что подмножества вида $\bigsqcup\limits_{i\in I} U_i$, где $U_i \subset o\, Y_i$ для всех $i \in I$, — это в точности все открытые множества *топологии несвязного объединения* на множестве $\bigsqcup\limits_{i\in I} Y_i$, то есть самой тонкой топологии, при которой все функции включения $Y_i \hookrightarrow \bigsqcup\limits_{i\in I} Y_i$, $i \in I$, непрерывны.

Покажите, что пространство разложенное в дизъюнктное объединение своих подпространств, является их несвязным объединением в точности, когда все эти подпространства являются открытыми.

Разбиение $X := \bigsqcup\limits_{i\in I} X_i$ ∞-метрического пространства (X, d) на метрические пространства (X_i, d_i), $i \in I$, (см. mt1.1.1) является примером несвязного объединения топологических пространств.

2.19. Упражнение. Пусть X — топологическое пространство, и топология на Y индуцирована функцией $f : X \to Y$. Покажите, что fX — это фактор-пространство и что Y — это несвязное объединение fX со всеми одноточечными пространствами $y \in Y \setminus fX$, то есть $Y = fX \sqcup \bigsqcup\limits_{y\in Y\setminus fX} y$.

Мы видим, что топология, индуцированная по направлению несюръективной стрелки, весьма примитивна вне ее образа. Топология индуцированная против направления неинъективной стрелки не используется по аналогичным причинам.

Пусть X_1, X_2 — топологические пространства и пусть $X_1 \times X_2$ — декартово произведение множеств, снабженное проекциями $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$. Адекватная топология на $X_1 \times X_2$ должна быть наигрубейшей топологией гарантирующей непрерывность *обеих* проекций, то есть она должна быть наименьшей топологией, содержащей топологии индуцированные проекциями π_1 и π_2.

2.20. Определение. Пусть X_1, X_2 — топологические пространства и пусть $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$, — проекции. *Топология произведения* на $X_1 \times X_2$ — это топология, *порожденная* всеми множествами вида $U_1 \times U_2$ с открытыми $U_i \subset o\, X_i$, $i = 1, 2$. Это означает, что открытые множества в $X_1 \times X_2$ являются (возможно бесконечными) объединениями подмножеств, называемых *базисными*, вида $U_1 \times U_2$ с открытыми $U_i \subset o\, X_i$, $i = 1, 2$.

Похожим образом мы можем определить топологию на декартовом произведении $\prod\limits_{i\in I} X_i$ (конечного или бесконечного) семейства X_i, $i \in I$, топологических пространств: такая топология порождена всеми множествами вида $\prod\limits_{i\in I} U_i$, с открытыми $U_i \subset o\, X_i$, $i \in I$, такими, что $U_i = X_i$ для всех индексов $i \in I$, кроме конечного числа.

2.21. Упражнение. Покажите, что эта топология является наигрубейшей топологией гарантирующей непрерывность всех проекций.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi_1 \circ f"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\pi_2 \circ f"] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

2.22. Упражнение. Докажите, что множество $X_1 \times X_2$ снабжено топологией произведения в точности, когда справедливо следующее свойство:

> Произвольная функция $f : X \to X_1 \times X_2$ из топологического пространства X непрерывна тогда и только тогда, когда обе композиции $\pi_1 \circ f$ и $\pi_2 \circ f$ непрерывны.

Это свойство является характеристическим для топологии произведения. Оно называется *универсальным.*

Следующая полезная лемма содержит многие часто используемые свойства непрерывных функций.

2.23. Лемма. *Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — функции между топологическими пространствами, пусть $X \supset X'$ и $Y \supset Y'$ — подпространства, пусть $\pi_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$ — проекции произведения топологических пространств X_i, $i \in I$, пусть $\iota_i : Y_i \hookrightarrow \bigsqcup\limits_{i\in I} Y_i$ — функции включения в несвязное объединение дизъюнктного семейства топологических пространств Y_i, $i \in I$, и пусть $f_i : X \to X_i$ и $g_i : Y_i \to Y$, $i \in I$, — непрерывные функции.*

1. *Если f и g непрерывны, то $g \circ f : X \to Z$ непрерывна.*

2. *Если f непрерывна, то ограничение $f|_{X'} : X' \to Y$ непрерывно.*

3. *Предположим, что $fX \subset Y'$. Тогда f непрерывна тогда и только тогда, когда соответствующая функция $f' : X \to Y'$* (называемая коограничением *функции f*) *является непрерывной.*

4. *Пусть $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ — открытое покрытие топологического пространства X. Функция f непрерывна тогда и только тогда, когда все ограничения $f|_{U_i} : U_i \to Y$, $i \in I$, являются непрерывными. Другими словами, "быть непрерывным" — это* локальное свойство *функции. Это утверждение известно как* лемма о склейке *для открытых.*

5. *Пусть $X \mathrel{c\!\supset} C_1, C_2$ такие замкнутые, что $C_1 \cup C_2 = X$. Функция f непрерывна тогда и только тогда, когда оба ограничения $f|_{C_1}$ и $f|_{C_2}$ являются непрерывными. Это утверждение называется* леммой о склейке *для замкнутых.*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[d, "h"] \\
X_i & \prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[l, "\pi_i"]
\end{tikzcd}$$

6. *Существует единственная непрерывная функция $h : X \to \prod\limits_{i\in I} X_i$ такая, что $\pi_i \circ h = f_i$ для всех $i \in I$. Это то самое* универсальное *свойство произведения, что упоминается в упражнении 2.22.*

$$\begin{tikzcd}
 & Y \\
Y_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "\iota_i"'] & \bigsqcup\limits_{i\in I} Y_i \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

7. *Существует единственная непрерывная функция*

$h : \bigsqcup_{i\in I} Y_i \to Y$ *такая, что* $h \circ \iota_i = g_i$ *для всех* $i \in I$. *Это* универсальное *свойство несвязного объединения.*

Доказательство. 1. См. упражнение 2.3.

2. Следует из предыдущего пункта.

3. Поскольку $f = \iota \circ f'$, где $\iota : Y' \hookrightarrow Y$ — функция включения, то f непрерывна если f' непрерывна, в силу пункта 1. Другая импликация получается из упражнения 2.7.

4. Предположим, что все ограничения $f|_{U_i} : U_i \to Y$, $i \in I$, непрерывны. Пусть $Y \,o\!\supset V$ открыто. Поскольку $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, мы имеем $f^{-1}V = \bigcup_{i\in I} (U_i \cap f^{-1}V)$, то есть, $f^{-1}V = \bigcup_{i\in I} (f|_{U_i})^{-1}V$. Остается заметить, что каждое подмножество $(f|_{U_i})^{-1}V$, будучи открытым в открытом U_i, является также открытым в X.

Другая импликация получается из пункта 2.

5. Действуем, как в пункте 4. Предположим, что ограничения $f|_{C_1}$ и $f|_{C_2}$ непрерывны. Пусть $Y \,c\!\supset C$ замкнуто. Мы имеем $f^{-1}C = (f|_{C_1})^{-1}C \cup (f|_{C_2})^{-1}C$. Благодаря непрерывности ограничения $f|_{C_i}$, множество $(f|_{C_i})^{-1}C$ замкнуто в C_i и, поэтому, в X (замкнутое в замкнутом замкнуто в силу упражнения 2.13). Значит, $f^{-1}C$ замкнуто в X. В силу предложения 2.2, функция f непрерывна.

Другая импликация получается из пункта 2.

6. Существование и единственность функции h справедливы на уровне множеств. Доказательство непрерывности функции h аналогично решению упражнения 2.22.

7. Существование и единственность функции h справедливы на уровне множеств. Доказательство непрерывности функции h — это простое упражнение ■

2.24. Упражнение. Докажите, что функция $f : X \to Y$ между топологическими пространствами непрерывна тогда и только тогда, когда $f\overline{S} \subset \overline{fS}$ для любого подмножества $S \subset X$.

2.25. Упражнение. Покажите, что для любой точки $p \in Y$ топологического пространства Y проекция $X \leftarrow X \times Y$ определяет гомеоморфизм топологического пространства X с подпространством $X \times p$.

2.26. Упражнение.* Докажите, что функция $\mathrm{d} : X \times X \to [0, \infty[$ (или функция $\mathrm{d} : X \times X \to [0, \infty]$, где $[0, \infty] := [0, \infty[\sqcup \infty$ — несвязное объединение) непрерывна для любого (∞-)метрического пространства.

Заключите из этого, что в любом метрическом пространстве каждый замкнутый шар является замкнутым множеством. Таким образом, использование слова "замкнутый" не приводит к двусмысленности.

2.27. Определение. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым,* если для любых двух различных точек $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, существуют дизъюнктные открытые $U_i \subset\!o\, X$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, такие, что $x_i \in U_i$ для всех $i = 1, 2$. Другими словами, в хаусдофовом пространстве, мы можем всегда *разделить* две различные точки, используя их дизъюнктные окрестности.

В частности, в хаусдорфовом пространстве не встречаются различные "сколь угодно близкие" точки.

Несмотря на то, что подавляющее большинство топологических пространств, с которыми мы будем иметь дело в этом курсе, являются хаусдорфовыми, нехаусдорфовы пространства тоже встречаются в математической природе.

2.28. Упражнение. Покажите, что подпространство хаусдорфова пространства, произведение любого семейства хаусдорфовых пространств и всякое метрическое пространство являются хаусдорфовыми.

Верно ли, что точки в хаусдорфовом пространстве являются замкнутыми?

2.29. Предложение. *Топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда* диагональ $\Delta := \big\{(x,x) \mid x \in X\big\}$ *является замкнутым множеством в* $X \times X$ (*с топологией произведения*), $\Delta \subset_c X \times X$.

Доказательство. Обозначим $W := (X \times X) \setminus \Delta$.

Предположим, что диагональ замкнута. Тогда W открыто. Пусть $x_1, x_2 \in X$ — различные точки, то есть $(x_1, x_2) \in W$. По определению 2.20, мы можем найти открытое вида $U_1 \times U_2$ такое, что $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset W$, где $x_i \in U_i \subset_o X$ открыто в X для всех $i = 1, 2$. Мы имеем $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, поскольку $(U_1 \times U_2) \cap \Delta = \varnothing$.

Обратно, предположим, что X хаусдорфово. Мы докажем, что W открыто. Пусть $(x_1, x_2) \in W$, $x_1 \neq x_2$, — произвольная точка подмножества W. Поскольку X хаусдорфово, то существуют дизъюнктные окрестности $x_i \in U_i \subset_o X$, $i = 1, 2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Поэтому, $U_1 \times U_2$ — окрестность точки (x_1, x_2) включенная в W, $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset W$. Результат следует из упражнения 1.9 ∎

2.30. Определение. Непрерывная функция между топологическими пространствами называется *открытой* (*замкнутой*), если образ каждого открытого (замкнутого) множества является открытым (замкнутым).

2.31. Упражнение. Пусть X и Y — топологические пространства. Будет ли открытой (замкнутой) проекция $X \times Y \to Y$?

2.32. Упражнение. Используя категорное определение произведения двух топологических пространств и разложение любой непрерывной функции в композицию непрерывных эпиморфизма и мономорфизма, докажите, что график Γ_f непрерывной функции $f : X \to Y$ гомеоморфен пространству X.

2.33. Упражнение. Докажите, что график Γ_f непрерывной функции $f : X \to Y$ замкнут в произведении $X \times Y$, то есть $\Gamma_f \subset_c X \times Y$, если пространство Y — хаусдорфово.

Верно ли, что каждая непрерывная функция в хаусдорфово пространство является композицией замкнутого мономорфизма и открытого эпиморфизма?

2.34. Упражнение. Докажите, что любая открытая (замкнутая) сюръекция является фактором.

3. Базы топологии и локальные базы. Пределы

Как мы видели, в определении 2.20 не было никакой необходимости перечислять все открытые множества для того, чтобы задать топологию произведения. Достаточно было указать подходящее семейство открытых, которое *порождает* топологию.

3.1. Определение. Топология на множестве X *порождается* некоторым семейством $\mathcal{B}$ открытых множеств, если любое открытое в X является объединением какого-то подсемейства семейства $\mathcal{B}$, то есть $\forall U \subset_o X\ \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\ U = \cup \mathcal{B}'$. Такое семейство $\mathcal{B}$ называется *базой открытых множеств* или просто *базой* топологии на X.

Предбазой топологии на X называется такое семейство открытых в X, что все пересечения конечных подсемейств этого семейства образуют базу топологии на X.

Неформально, база топологии — это некоторое семейство сколь угодно малых окрестностей точек пространства.

Нетрудно проверить, что пересечение $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ любого семейства $\mathcal{T}_i \subset 2^X$, $i \in I$, топологий на множестве X — это снова топология. Поэтому для произвольного семейства $\mathcal{P} \subset 2^X$ подмножеств множества X существует наименьшая топология $\mathcal{T}_\mathcal{P} := \bigcap\limits_{\substack{\text{топо-}\\\text{логия}\\ \mathcal{T} \supset \mathcal{P}}} \mathcal{T}$, содержащая семейство $\mathcal{P}$. Топологию $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ можно описать явно: семейство $\mathcal{B}$ всех пересечений конечных подсемейств семейства $\mathcal{P}$ является базой топологии $\mathcal{T}_\mathcal{P}$. Таким образом, любое семейство $\mathcal{P} \subset 2^X$ подмножеств множества X служит предбазой некоторой топологии (а именно, топологии $\mathcal{T}_\mathcal{P}$).

3.2. Пример. Множества вида $\pi_i^{-1} U_i$, где $i \in I$ и $U_i \subset_o X_i$, образуют предбазу топологии (снабженного проекциями) произведения $\prod\limits_{i \in I} X_i \xrightarrow{\pi_i} X_i$, $i \in I$, семейства топологических пространств X_i, $i \in I$.

3.3. Упражнение. Покажите, что семейство $\mathcal{B} \subset 2^X$ подмножеств в X порождает некоторую топологию на X тогда и только тогда, когда пересечение любого конечного подсемейства семейства $\mathcal{B}$ является объединением некоторого (возможно бесконечного) подсемейства семейства $\mathcal{B}$.

3.4. Пример. Семейство всех открытых шаров $B(x; r)$ с $x \in X$ и $r > 0$ очевидно является базой топологии произвольного метрического пространства X. Более того, можно ограничиться открытыми шарами сколь угодно малых рациональных радиусов, например, открытыми шарами вида $B(x; \frac{1}{n})$, где $x \in X$ и $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

В частности, открытые шары в метрике L^p образуют базу топологии на $\mathbb{R}^n$ (см. упражнение mt1.7).

3.5. Пример. *Открытый прямоугольник* на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами — это подмножество вида $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$. Такие прямоугольники образуют базу топологии на $\mathbb{R}^2$.

Аналогично, *открытые n-паралелепипеды* $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$ составляют базу топологии на $\mathbb{R}^n$.

3.6. Упражнение. Покажите, что $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно произведению n копий $\mathbb{R}$.

3.7. Пример. Открытые сегменты образуют базу топологии связанной с линейным порядком на множестве (см. пример 1.4).

3.8. Определение. Подмножество $D \subset X$ топологического пространства X называется (*всюду*) *плотным,* если пространство X является его замыканием, $\overline{D} = X$.

По лемме 1.15, D плотно в X в точности, когда любая окрестность произвольной точки из X содержит точки из D. Другими словами, в D имеются точки сколь угодно близкие к произвольной точке из X. В терминах базы $\mathcal{B}$ топологии на X, подмножество $D \subset X$ плотно в X в точности, когда любое непустое открытое из базы пересекается с D, то есть $\forall U \in \mathcal{B}\ U \neq \varnothing \Rightarrow U \cap D \neq \varnothing$.

3.9. Упражнение.* Пусть $X \xrightarrow{f} X'$ и $X \xrightarrow{f'} X'$ — непрерывные функции между топологическими пространствами, $X \supset D$ и $X' \supset D'$ — плотные подмножества в X и в X', соответственно, а $X \, o{\supset}\, U$ — открытое в X.

Покажите, что fD плотно в fX, что $D \cap U$ плотно в U и что $D \times D'$ плотно в $X \times X'$.

Предполагая X' хаусдорфовым, докажите, что $f|_D = f'|_D$ влечет $f = f'$.

3.10. Определение. Семейство $\mathcal{B}$ окрестностей точки $p \in X$ в топологическом пространстве X называется *базой окрестностей* точки p или *локальной базой* пространства X в точке p, если всякая окрестность точки p содержит некоторый элемент семейства $\mathcal{B}$, то есть $\forall U\ p \in U \subset\!o\, X \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}\ B \subset U$.

Если всякая точка топологического пространства X обладает счетной базой окрестностей, мы говорим, что X имеет *счетную базу окрестностей точек* или что X удовлетворяет *первой аксиоме счетности.* Если пространство X обладает *счетной базой топологии* (эквивалентно, счетной предбазой топологии), то X удовлетворяет *второй аксиоме счетности.*

Первая (вторая) аксиома счетности очевидно наследуется подпространствами.

Ясно, что некоторое семейство $\mathcal{B}$ открытых множеств пространства X является базой топологии на X в точности, когда семейство $\mathcal{B}_p := \{U \in \mathcal{B} \mid p \in U\}$ является базой окрестностей точки p для всех $p \in X$. И наоборот, объединение баз окрестностей всех точек является базой топологии на X.

Каждое метрическое пространство X имеет счетную базу окрестностей точек: например, открытые шары $B(p; \frac{1}{n})$, $0 \neq n \in \mathbb{N}$, образуют базу окрестностей точки $p \in X$.

3.11. Упражнение. Заметьте, что в топологическом пространстве, обладающем счетной базой топологии, имеется счетное плотное подмножество и докажите, что существование счетного плотного подмножества D в метрическом пространстве X влечет вторую аксиому счетности.

3.12. Упражнение. Докажите, что первая (вторая) аксиома счетности наследуется произведениями счетных семейств топологических пространств.

Пространства со счетной базой окрестностей точек на практике встречаются довольно часто, и их топология может быть выражена в терминах сходящихся последовательностей. Хотя этот взгляд на топологию довольно архаичен, он все еще активно используется. Ниже для полноты приводится перевод основных топологических понятий на язык сходящихся последовательностей.

3.13. Определение. Последовательность в топологическом пространстве X — это просто функция $\mathbb{N} \xrightarrow{s} X$ или, что по существу то же самое, семейство точек $s_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Мы говорим, что последовательность s *сходится* к точке $p \in X$ или что точка $p \in X$ является *пределом* последовательности s (в этом случае мы также говорим, что предел последовательности *существует*), если любая окрестность точки p содержит все члены последовательности, кроме конечного числа, то есть $\forall U\ p \in U \subset\!o\, X \Rightarrow |\mathbb{N} \setminus s^{-1}U| < \infty$. В этой ситуации используются обозначения $s(n) \to p$ или $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = p$.

Пусть $\mathbb{N} \xrightarrow{s} X$ — сходящаяся последовательность в X, и пусть $\mathbb{N} \xrightarrow{t} \mathbb{N}$ функция с конечными прообразами элементов, то есть $\forall n \in \mathbb{N}\, |t^{-1}n| < \infty$. (В том частном случае, когда t инъективна и монотонна, последовательность $s \circ t$ называется *подпоследовательностью* последовательности s.) Нетрудно проверить, что любой предел последовательности s является пределом последовательности $s \circ t$, а если $|\mathbb{N} \setminus t\mathbb{N}| < \infty$, то последовательности s и $s \circ t$ имеют одинаковые пределы.

3.14. Упражнение. Пусть $f : X \to Y$ — функция между топологическими пространствами непрерывная в точке $p \in X$, $X \, o\!\supset U$ — открытое в X и $X \supset S$ — произвольное подмножество в X.

• Для любой последовательности $s_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, из $s_n \to p$ следует $f(s_n) \to f(p)$. В частности, непрерывные функции сохраняют пределы последовательностей.

• Любая последовательность $\mathbb{N} \xrightarrow{s} X$, сходящаяся к точке из U, содержится в U, кроме конечного числа ее членов, то есть $s(n) \to u \in U \Rightarrow |\mathbb{N} \setminus s^{-1}U| < \infty$.

• Любой предел последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{s} S$ сходящейся в X принадлежит замыканию $\overline{S}$ подмножества S. Таким образом, замкнутые множества замкнуты относительно взятия пределов последовательностей.

3.15. Упражнение. Предположим, что топологическое пространство X имеет счетную базу окрестностей точек. Пусть $f : X \to Y$ — функция между топологическими пространствами, и $X \supset S$ — подмножество.

• Функция f непрерывна в точке $p \in X$ тогда и только тогда, когда $s_n \to p$ влечет $f(s_n) \to f(p)$ для любой последовательности $s_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, (Подсказка: изготовьте базу U_n, $n \in \mathbb{N}$, окрестностей точки $p \in X$ такую, что $U_n \supset U_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.) В частности, функция из X непрерывна в точности, когда она сохраняет пределы последовательностей.

• Точка $p \in X$ принадлежит внутренности подмножества S, $p \in \operatorname{Int} S$, тогда и только тогда, когда любая последовательность $\mathbb{N} \xrightarrow{s} X$ сходящаяся к p содержится в S, кроме конечного числа ее членов. В частности, мы получаем характеризацию множеств открытых в X в терминах сходящихся последовательностей.

• Точка $p \in X$ принадлежит замыканию подмножества S, $p \in \overline{S}$, тогда и только тогда, когда p является пределом в X некоторой последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{s} S$. В частности, замкнутые в X множества — это в точности подмножества замкнутые относительно взятия пределов в X.

3.16. Определение. Пусть X и Y — топологические пространства, $X \ni x_0$ и $Y \ni y_0$ — точки и $X \setminus x_0 \xrightarrow{f} Y$ (или $X \xrightarrow{f} Y$) — функция. Будем говорить, что *точка $y_0 \in Y$ является пределом функции $f(x)$, когда точка $x \in X$ стремится к точке $x_0 \in X$*, если функция $\hat{f} : X \to Y$, заданная формулой $\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \neq x_0 \\ y_0, & \text{если} \quad x = x_0 \end{cases}$, непрерывна в точке x_0, обозначая в этой ситуации $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, Другими словами, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, если для каждой окрестности $Y \, o\!\supset V \ni y_0$ точки y_0 существует такая окрестность $X \, o\!\supset U \ni x_0$ точки x_0, что $f(U \setminus x_0) \subset V$.

3.17. Определение. Точка топологического пространства X называется *изолированной (в X)*, если она является открытой в X.

3.18. Замечание. Определим топологию на множестве $\check{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \sqcup \infty$, объявляя открытым множество $U \subset \check{\mathbb{N}}$, если $\infty \notin U$ или если $\check{\mathbb{N}} \setminus U$ конечно. Если $s : \mathbb{N} \to Y$ — произвольная последовательность в топологическом пространстве Y, то тот факт, что $Y \ni y_0$ — предел этой последовательности, эквивалентен соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = y_0$ в смысле определения 3.16. Поэтому предел последовательности — это частный случай предела функции.

Топологическое пространство $\check{\mathbb{N}}$ представляет собой некую абстрактную модель сходящейся последовательности, причем непрерывная функция из $\check{\mathbb{N}}$ в топологическое пространство Y — это в точности сходящаяся последовательность в Y вместе с каким-то ее пределом. Все точки в $\check{\mathbb{N}}$, кроме точки ∞, являются изолированными. Ясно, что $\check{\mathbb{N}}$ гомеоморфно подпространству $\{\frac{1}{n} \mid 0 \neq n \in \mathbb{N}\} \sqcup 0 \subset \mathbb{R}$.

3.19. Упражнение. Пусть X, Y и Z — топологические пространства, $X \ni x_0$, $Y \ni y_0$ и $Z \ni z_0$ — точки и $f : X \setminus x_0 \to Y$ и $g : Y \setminus y_0 \to Z$ — функции.

• Если $f(X \setminus x_0) \subset Y \setminus y_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ и $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = z_0$. (Подсказка: используйте упражнение 2.3.) В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, то для любой последовательности $X \setminus x_0 \ni s_n \to x_0$, сходящейся в X к x_0, справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = y_0$.

• Предположим, что точка x_0 имеет счетную базу окрестностей в X. Тогда импликация $X \setminus x_0 \ni s_n \to x_0 \Rightarrow f(s_n) \to y_0$ эквивалентна соотношению $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

• Предполагая, что точка $x_0 \in X$ не является изолированной в X и что пространство Y является хаусдорфовым, докажите, что предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ единственен, если существует.

• Чему может быть равен предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если точка $x_0 \in X$ изолирована в X ?

3.20. Упражнение. Пусть X топологическое пространство, в котором каждая сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Докажите, что все точки в X замкнуты. Докажите, что X хаусдорфово, если имеет счетную базу окрестностей точек.

4. Связность и линейная связность

4.1. Определение. Топологическое пространство X *несвязно,* если $X = \varnothing$ или $X = U_1 \sqcup U_2$ для некоторых непустых открытых $\varnothing \neq U_1, U_2 \subset\!\!o\, X$. В противном случае, X называется *связным.*

Другими словами, непустое топологическое пространство X связно в точности, когда единственными открыто-замкнутыми в X множествами являются $\varnothing$ и X. Эквивалентно, непустое топологическое пространство X связно тогда и только тогда, когда любая непрерывная функция $f : X \to Y$ в дискретное топологическое пространство Y (вариант: Y — двухточечное дискретное топологическое пространство, $|Y| = 2$) является постоянной (другим словом, *константой*), то есть fX — одна точка.

4.2. Упражнение. Докажите следующие утверждения.

• Замыкание связного подпространства является связным.

• Непрерывный образ связного топологического пространства связен.

•* (*Теорема о промежуточном значении.*) Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение из связного топологического пространства X, пусть $r_1, r_2 \in fX$ и $r_1 < r < r_2$. Тогда $r \in fX$.

•* Произведение $X := \prod_{i\in I} X_i$ произвольного семейства X_i, $i \in I$, топологических пространств является связным тогда и только тогда, когда каждое пространство X_i, $i \in I$, является связным.

4.3. Определение. Определим бинарные отношения $\sim$ и $\approx$ между точками топологического пространства X. Для точек $x_0, x_1 \in X$ отношение $x_0 \sim x_1$ означает, что существует непрерывная функция $\mathbb{R} \supset [r_0, r_1] \xrightarrow{p} X$ такая, что $p(r_0) = x_0$ и $p(r_1) = x_1$, а отношение $x_0 \approx x_1$ означает, что существует связное подпространство $C \subset X$ такое, что $x_0, x_1 \in C$.

В силу упражнения 4.4, отношение $\approx$ (как и отношение $\sim$) является эквивалентностью, и классы эквивалентности, называемые *компонентами* (*линейной*) *связности,* являются максимальными (линейно) связным подпространствоми пространства X. (Непустое пространство *линейно связно,* если все его точки $\sim$-эквивалентны.)

Из упражнения 4.2 (первое утверждение) следует, что связные компоненты топологического пространства X являются замкнутыми в X. Благодаря упражнениииям 4.2 (второе утверждения) и mt1.8.22–23, линейно связное пространство является связным.

4.4. Упражнение. Докажите, что $\sim$ и $\approx$ — это отношения эквивалентности на X. (Подсказка: для $\sim$ используйте лемму 2.23.5, а для $\approx$ — функцию в двухточечное дискретное пространство.)

Заметьте, что каждый класс эквивалентности $\approx$ (эквивалентности $\sim$) является (линейно) связным.

4.5. Определение. Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым,* если вместе с каждыми своими двумя точками $p_0, p_1 \in S$ оно содержит отрезок соединяющий эти точки, то есть $[p_0, p_1] := \big\{(1-t)p_0 + tp_1 \mid t \in [0,1]\big\} \subset S$.

Ясно, что любое непустое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$ является линейно связным. В силу mt1.8.22–23, любое связное подмножество в $\mathbb{R}$ выпукло.

4.6. Упражнение. Пусть ν такая норма на $\mathbb{R}^n$, что $\nu(r\cdot x) = |r|\cdot\nu(x)$ для любых $r \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что любой отрытый (замкнутый) шар в $\mathbb{R}^n$ с такой нормой является выпуклым подмножеством.

4.7. Упражнение. Заметьте, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ связно при $n \geqslant 2$, где $\mathbb{R}^n \ni p_1, \dots, p_m$ — произвольные точки.

Покажите, что пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны, если $n \geqslant 2$.

Покажите, что подпространства $]r_0, r_1[\,, [r_0, r_1[\,, [r_0, r_1] \subset \mathbb{R}$ не гомеоморфны, если $r_0 < r_1$.

4.8. Упражнение.* Докажите, что любая непрерывная инъективная функция $\mathbb{R} \supset [r_0, r_1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ либо сохраняет порядок, либо его обращает.

4.9. Определение. Топологическое пространство называется *локально* (*линейно*) *связным,* если у каждой его точки имеется база (линейно) связных окрестностей.

4.10. Упражнение. Докажите, что всякое локально (линейно) связное топологическое пространство является несвязным объединением своих (линейно) связных компонент.

4.11. Упражнение. Докажите, что всякое связное топологическое пространство является линейно связным, если оно локально линейно связно. Проверьте, что любое открытое в $\mathbb{R}^n$ подпространство является локально линейно связным.

4.12. Определение. Топологическое пространство X называется *вполне несвязным,* если любая его компонента связности является точкой. Другими словами, топологическое пространство вполне несвязно в точности, когда единственными связными его подпространствами являются точки.

4.13. Упражнение.* Докажите, что фактор-пространство $X/\approx$ вполне несвязно. Покажите также, что для любой непрерывной функции $X \xrightarrow{f} Y$ во вполне несвязное пространство Y существует единственная непрерывная функция $X/\approx \xrightarrow{g} Y$ такая, что $f = g \circ \pi$.

4.14. Упражнение. Заметьте, что подпространство вполне несвязного пространства вполне несвязно. Покажите, что произведение любого семейства вполне несвязных пространств является вполне несвязным пространством.

4.15. Упражнение. Докажите, что хаусдорфово пространство обладающее предбазой топологии состоящей из замкнутых множеств является вполне несвязным. Докажите, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}_p$ — вполне несвязные пространства.

5. Компактность

Грубо говоря, топологическое пространство компактно, когда оно чем-то похоже на *конечное* пространство. Другими словами, компактность отражает определенные аспекты топологии конечных пространств.[2] Эти аспекты связаны с возможностью выводить глобальные свойства топологического пространства из его локальных свойств, переходить от *локального* к *глобальному.*

5.1. Определение. Топологическое пространство X называется *компактным* или *компактом,* если для любого топологического пространства Y проекция $X \times Y \to Y$ является замкнутой функцией.

Иногда в определении компакта предполагается его хаусдорфовость. В такой терминологии, необязательно хаусдорфовы компакты именуются *квази-компактами* (или *квази-компактными* пространствами).

5.2. Упражнение. Покажите, что проекция $X \times Y \to Y$ замкнута тогда и только тогда, когда множество $V_W := \{y \in Y \mid X \times y \subset W\}$ открыто в Y для любого открытого $W \subset o\, X \times Y$.

5.3. Предложение. *Следующие свойства топологического пространства X эквивалентны.*

1. *X — компакт.*

2. *Проекция $X \times Y \to Y$ является замкнутой функцией для любого хаусдорфова пространства Y, в котором лишь одна точка не является открытой.*

3. *Любое открытое покрытие пространства X обладает конечным подпокрытием.*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2. Очевидно.

---

[2]Представьте, что все сферы в мире красные и больше ничего красного нет. Тогда нет никакой необходимости различать понятия “сферический” и “красный”… до тех пор, когда однажды вдруг обнаружатся красный куб и зеленая сфера! Нечто аналогичное случается и здесь: “компактность” и “дискретность” — это две характеристики, которые вместе составляют конечность.

2 ⇒ 3. Пусть $U_i \subset o\, X$, $i \in I$, — открытое покрытие, $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, не обладающее конечным подпокрытием. Можно предполагать, что семейство U_i, $i \in I$, замкнуто относительно конечных объединений.

Определим топологию на множестве $Y := I \sqcup \infty$, объявляя открытым подмножества, не содержащие ∞ или содержащие некоторое $Y_i := \{y \in Y \mid U_i \subset U_y\}$, $i \in I$, где $U_\infty := X$. Из $Y_{i_1} \cap Y_{i_2} = \{y \in Y \mid U_{i_1} \cup U_{i_2} \subset U_y\}$, где $i_1, i_2 \in I$, и замкнутости семейства U_i, $i \in I$, относительно конечных объединений следуют аксиомы топологии, причем все точки из I открыты. Поскольку U_i, $i \in I$, — покрытие пространства X и $U_i \neq X$ для любого $i \in I$, то $\bigcap\limits_{i\in I} Y_i = \infty$. Следовательно, пространство Y хаусдорфово.

Пусть $W := \bigcup\limits_{y\in Y} U_y \times y \subset X \times Y$ и $(x, y) \in W$, то есть $x \in U_y$. Если $y = \infty$, то $x \in U_i$ для некоторого $i \in I$, откуда $(x, y) \in U_i \times Y_i \subset W$. Если $I \ni y =: i$, то $(x, y) \in U_i \times Y_i \subset W$. Поэтому $W \subset o\, X \times Y$.

В силу упражнения 5.2, из $\infty \in V_W := \{y \in Y \mid X \times y \subset W\}$, следует $X \times Y_i \subset W$ для некоторого $i \in I$. Значит $X \times i \subset W$ и $X = U_i$; противоречие.

3 ⇒ 1. Пусть $W = \bigcup\limits_{i\in I} U_i \times V_i$ — произвольное открытое в $X \times Y$, где $U_i \subset o\, X$ и $V_i \subset o\, Y$ для всех $i \in I$. Для произвольной точки $y \in V_W := \{y \in Y \mid X \times y \subset W\}$ из $X \times y \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i \times V_i$ следует $X = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ y\in V_i}} U_i$. У этого покрытия пространства X имеется конечное подпокрытие: существует конечное подмножество $J \subset I$, $|J| < \infty$, такое, что $y \in V_j$ для всех $j \in J$ и $X = \bigcup\limits_{j\in J} U_j$. Следовательно, $X \times \left(\bigcap\limits_{j\in J} V_j\right) \subset \bigcup\limits_{j\in J} U_j \times V_j \subset W$. Иными словами, $y \in \bigcap\limits_{j\in J} V_j \subset V_W$. Мы доказали, что $V_W \subset o\, Y$. Осталось воспользоваться упражнением 5.2 ∎