Подсказки

Множества и алгебра

sa1.6.2. Если $b : C \to 2^C$ биекция, то $\{c \in C \mid c \notin b(c)\} = b(c_0)$ для некоторого $c_0 \in C$. Что именно[1] выполнено $c_0 \in b(c_0)$ или $c_0 \notin b(c_0)$?

sa1.7.4. Используйте двоичную систему записи действительных чисел.

sa2.3.10. Для данного множества C, рассмотрите множество $\mathcal{T} \subset 2^C$ всех вполне упорядоченных подмножеств множества C, то есть

$$\mathcal{T} := \{(T, \leqslant) \mid \leqslant \text{ — полный порядок на подмножестве } T \subset C\}.$$

Задайте на $\mathcal{T}$ порядок $(T_1, \leqslant) \preccurlyeq (T_2, \leqslant)$ означающий, что T_1 является начальным сегментом в T_2, и проверьте условия леммы Цорна показав, что объединение любой цепи в $\mathcal{T}$ является верхней гранью этой цепи.

sa2.3.14. Определите порядок на множестве $\mathcal{B} := \{S \xrightarrow{b} S \times S \mid S \subset C \text{ и } b \text{ — биекция}\}$ и используйте лемму Цорна. Если $S \xrightarrow{b} S \times S$ из $\mathcal{B}$ с бесконечным S той же мощности, что и подмножество $S' \subset C \setminus S$, $|S| = |S'|$, то биекцию b можно продолжить до биекции $S_0 \xrightarrow{b_0} S_0 \times S_0$ по лемме sa2.3.13, где $S_0 := S \sqcup S'$.

Общая топология

gt1.17. Рассмотрите сначала случай, когда все точки в X замкнуты. Никто не гарантирует, что все утверждения, сформулированные в упражнениях, верны.

gt2.11. Два утверждения не верны: когда функции g и $g \circ f$ (функции f и $g \circ f$) индуцируют топологию по направлению (против направления) стрелки, третья не индуцирует.

gt2.26. Воспользуйтесь определением gt2.1 и упражнением mt1.5.

gt3.9. Для последнего утверждения воспользуйтесь предложением gt2.29.

gt3.11. Открытые шары $B(d; q)$, $d \in D$, $q \in \mathbb{Q}$, образуют базу топологии на X : возьмите любую окрестность $X \mathrel{o{\supset}} U \ni p$ произвольной точки $p \in X$ и заметьте, что существуют $0 < r \in \mathbb{R}$, $d \in D$ и $q \in \mathbb{Q}$ такие, что $d \in B(p, r) \subset B(p, 3r) \subset U$, $r < q < 2r$ и $p \in B(d, q) \subset U$.

gt4.2. Для теоремы о промежуточном значении используйте описание всех связных подмножеств пространства $\mathbb{R}$, полученное в упражнениях mt1.8.22–23.

Для последнего утверждения рассмотрите непрерывное отображение $f : X \to Y$, где Y — двухточечное дискретное пространство, $|Y| = 2$. Используя упражнение gt2.25, заметьте, что значение $f\big((x_i)_{i \in I}\big)$ функции f не меняется, если варьировать точку $x_i \in X_i$ при фиксированном $i \in I$ и рассмотрите непустое базисное открытое в X, на котором функция f постоянна.

gt4.8. Заметьте, что подмножество $C := \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0 \leqslant x_0 < x_1 \leqslant r_1\}$ выпукло в $\mathbb{R}^2$ и что $0 \notin gC$, где $g(x_0, x_1) := f(x_0) - f(x_1)$.

---

[1] Представленная идея, эксплуатирующая *диагонализацию Кантора,* была фактически использована в парадоксе Рассела в sa1.2.2. Эта же идея используется в доказательстве алгоритмической неразрешимости некоторых проблем.

gt4.13. Для связного подпространства $C \subset X/{\approx} \xleftarrow{\pi} X$ рассмотрите непрерывную функцию из $\pi^{-1}C$ в двухэлементное дискретное пространство.

Метрическая топология

mt1.8.13. Проверьте, что $B(x_1; r_1) \pm B(x_2; r_2) \subset B(x_1 \pm x_2; r_1 + r_2)$.

mt1.8.14. Проверьте, что $B(x_1; r_1) \cdot B(x_2; r_2) \subset B\big(x_1 \cdot x_2; \nu(x_1) \cdot r_2 + r_1 \cdot \nu(x_2) + r_1 \cdot r_2\big)$, где, вопреки стандартному соглашению, $S_1 \cdot S_2 := \{s_1 \cdot s_2 \mid s_1 \in S_1 \wedge s_2 \in S_2\}$ для подмножеств $S_1, S_2 \subset X$ кольца X.

mt1.8.23. Если $U_1 \sqcup U_2 = S$ — разбиение сегмента S на открытые в S множества, $U_1, U_2 \subset\!o\, S$, и $U_1 \ni u_1 < u_2 \in U_2$, то супремум $s := \sup\{x \in U_1 \mid x < u_2\}$ удовлетворяет неравенствам $u_1 \leqslant s \leqslant u_2$, поэтому $s \in S$. Из $U_1, U_2 \subset\!o\, S$ следует $s \notin U_1$ и $s \notin U_2$.

mt1.8.28. Из $\mathrm{d}(x, x') \geqslant \mathrm{d}_i\big(\pi_i(x), \pi_i(x')\big)$ следует, что проекция $\pi_i(s_n)$, $n \in \mathbb{N}$, произвольной последовательности Коши $s_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, является последовательностью Коши в X_i. Чтобы доказать, что $(x_i)_{i \in I} \in X$ — предел последовательности s_n, $n \in \mathbb{N}$, где $x_i := \lim\limits_{n \to \infty} \pi_i(s_n)$, можно перейти к подпоследовательности и считать, что $\mathrm{d}(s_m, s_n) \leqslant \frac{1}{m}$ для $0 < m \leqslant n$. Тогда $\mathrm{d}_i\big(\pi_i(s_m), x_i\big) < \frac{2}{m}$.

mt1.8.31. Для замкнутости открытых шаров, заметьте, что $B(c; r) \cap B(x; \varepsilon) \neq \varnothing$ при $0 < \varepsilon \leqslant r$ влечет $B(c; r) \supset B(x; \varepsilon)$. Для доказательства полноты пространства $(\hat{X}, \mathrm{d})$, используйте, что функция $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\max} \mathbb{R}$, $(r_1, r_2) \mapsto \max(r_1, r_2)$, является непрерывной, поскольку $\max(r_1, r_2) = r_1 + \max(0, r_2 - r_1)$ и $\max(0, r) = \frac{1}{2}\big(|r| + r\big)$ для всех $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.