À guisa de prefácio

Estas notas têm como base as “Palestras em teoria da medida”, de autoria do professor Misha Verbitsky. Daquelas, no entanto, não constituem propriamente uma tradução: encontrando nas palestras do professor M. Verbitsky uma ampla coleção de assuntos belos e atraentes, escolhemos (com base em nossos interesses e estética pessoais) alguns para apresentar e, às vezes, estender. Esperamos que o resultado constitua, assim como as “Palestras em teoria da medida”, uma exposição moderna e atraente da teoria da medida. Se este não for o caso, é claro, somos os únicos a se culpar.

Misha Verbitsky é professor da principal instituição de ensino de excelência em matemática da Rússia contemporânea, a Universidade Independente de Moscou. Além de reconhecido grande professor, ele também é um cientista muito influente, com trabalhos importantes em geometria algébrica, geometria de variedades de Kähler e de Calabi-Yau, espaços de moduli, etc. Foi um dos 10 palestrantes convidados na área de Geometria Algébrica e Complexa do Congresso Internacional de Matemáticos de 2014.

As “Palestras em teoria da medida” foram preparadas para alunos do segundo ano da UIM e lá apresentadas em 2010 e em 2015 (em uma versão revisada). Elas coroam um frutífero caminho de desenvolvimento do ensino da teoria da medida que se iniciou ainda na Universidade Estadual de Moscou (com A. A. Kirilov, I. M. Gelfand, Yu. I. Manin, D. A. Kazhdan, dentre outros) e que agora continua na Universidade Independente de Moscou.

Há exercícios no decorrer do texto bem como exercícios suplementares. Os exercícios suplementares, algumas vezes, oferecem uma visão diferente do assunto tratado no texto. É desejável que o leitor resolva, pelo menos, metade dos exercícios propostos. Esperamos que este trabalho seja prazeroso: em sua maioria, os exercícios devem ser bem lindos e interessantes, às vezes desafiando a criatividade do leitor (tal componente é indispensável no estudo da matemática).

Por fim, expressamos nossa sincera gratidão aos alunos Christian Vilas Boas, Felipe de Aguilar Franco, Gabriel Nogueira Malta, Hugo Cattarucci Botós, João dos Reis Junior, Omar Chavez Cussy, Philipy Valdeci Chiovetto, Rafael Ferreira Pereira, Sidnei Furtado Costa e, em especial, ao Uirá Norberto Matos de Almeida, que também deve ser considerado como um dos professores desta que foi a primeira turma brasileira a utilizar as presentes notas. O interesse, a motivação, as sugestões e a participação ativa de todos eles nos foram absolutamente essenciais.

Carlos e Sasha

São Carlos, 13 de agosto – 23 de dezembro de 2015

E subiu Baphomet a Arquimedes, e questionou:
Queres conceber o volume de figuras complicadas?
Me dida,[1] *— respondeu Arquimedes.*
— Geron, "Satanismo básico para cozinheiras"
Edição VI*, capítulo* XIII*, Siracusa,* DCLXVI d.C.

1. Introdução

Historicamente, o conceito de integração remete a Arquimedes, Newton e Leibniz. No entanto, a fundamentação rigorosa da teoria de integração foi possível apenas na segunda metade do século XIX, graças a Cauchy, Dirichlet e Riemann. A abordagem introduzida por estes matemáticos, agora anacrônica,[2] culminou nos trabalhos de Lebesgue, que datam de 1902–1903, e nos quais foram definidos os conceitos de medida e de função mensurável agora comumente aceitos.

Durante o século XX, os fundamentos da integração tornaram-se mais e mais simples. Na exposição contemporânea, a teoria da medida é construída axiomaticamente e não exige nada além de fatos básicos da teoria ingênua de conjuntos, topologia e análise.

Henri Léon Lebesgue
28 de junho de 1875 – 26 de julho de 1941

[1] "Didar" é um verbo esquecido do Latim antigo e significa "ensinar". A palavra portuguesa contemporânea "didática" tem esta origem.

[2] Um das razões para a fundação dos Bourbaki, ainda na década de 30, era a necessidade de se escrever um tratado moderno de análise para evitar, em particular, que a integração de Riemann continuasse a ser ensinada em cursos de graduação.

A palavra "medida" expressa, na maiora dos casos, "volume" de subconjuntos. Em outras palavras, a medida de um subconjunto é a integral da função que assume valor 1 neste subconjunto e 0 fora dele. Tal função se chama *função característica* do subconjunto. Para construir a teoria de integração, basta saber integrar funções características. É exatamente por isso que a teoria de integração passou a se chamar *teoria da medida*.

Medida é uma função que manda subconjuntos de um espaço para números reais e que satisfaz certas propriedades de volume. Via de regra, definir uma medida no conjunto de todos os subconjuntos é impossível: isto leva a paradoxos conjunto-teoréticos (ou à necessidade de se alterar a axiomática tradicional de conjuntos). Por isso, para a construção da teoria da medida, precisamos inicialmente definir quais subconjuntos são *mensuráveis* e, depois, introduzir a medida como uma função no conjunto de todos os subconjuntos mensuráveis.

Como uma primeira aproximação à teoria da medida, falaremos sobre o volume de polítopos[3] e sobre o invariante de Dehn, descoberto na solução do terceiro problema de Hilbert.

2. Álgebras booleanas e funções finito-aditivas

Seja C um conjunto. Denotamos por 2^C o conjunto de todos os subconjuntos de C. Podemos pensar em 2^C como sendo o conjunto de todas as funções $C \to \{0,1\}$. Para isto, basta associar a cada $X \in 2^C$ sua *função característica,* que manda os pontos de X para 1 e, os demais, para 0.

2.1. Definição. Uma família $\mathcal{A} \subset 2^C$ de subconjuntos de C se chama uma *álgebra booleana de subconjuntos* se contém $\varnothing$ e se, dados $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, a união $A_1 \cup A_2$, a interseção $A_1 \cap A_2$ e a diferença $A_1 \setminus A_2$ pertencem a $\mathcal{A}$.

Identificando $\{0,1\}$ com o corpo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dois elementos, podemos fazer a soma e o produto de funções características. Isto introduz uma estrutura de anel comutativo em qualquer álgebra booleana de subconjuntos $\mathcal{A} \subset 2^C$ (se $C \in \mathcal{A}$, o anel possui unidade) : em termos de subconjuntos, a multiplicação de funções características corresponde à interseção e a soma corresponde à *diferença simétrica* $A_1 + A_2 := (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$. Todo elemento em $\mathcal{A}$ é idempotente. (Um elemento a em um anel arbitrário se chama *idempotente* se $a^2 = a$.) Nesta interpretação, álgebras booleanas de subconjuntos constituem exemplos de *álgebras booleanas* :

2.2. Definição. Uma *álgebra booleana* A é um anel comutativo (possivelmente, sem unidade) no qual todo elemento é idempotente. Os conceitos de subálgebra, homomorfismo, ideal, quociente por ideal, produto cartesiano, etc. são os mesmos como para anéis. Na categoria de *álgebras booleanas com unidade*, homomorfismos preservam a unidade, subálgebras contêm a unidade, etc. Toda álgebra booleana é uma $\mathbb{F}_2$-álgebra, pois $2x = 0$ para todo x (de fato, $2x = (2x)^2 = 4x^2 = 4x$).

Introduzimos em álgebras booleanas uma relação de ordem parcial declarando $a_1 \leqslant a_2$ exatamente quando $a_1 = a_1 a_2$. (Assim, 0 é minimal e 1 é maximal, caso exista.) Em uma álgebra booleana de subconjuntos, esta é a ordem parcial "estar contido". Continuando a analogia com os conjuntos, introduzimos as operações binárias $\vee, \wedge, \setminus$: $a_1 \vee a_2 := a_1 + a_2 + a_1 a_2$, $a_1 \wedge a_2 := a_1 a_2$ e $a_1 \setminus a_2 := a_1 + a_1 a_2$. Estas correspondem respectivamente a $\cup, \cap, \setminus$ em álgebras booleanas de subconjuntos. Finalmente, se temos $1 \in A$, introduzimos em A a operação unária $\neg$ definindo $\neg a := 1 + a$; isto corresponde a "tomar o complementar" em uma álgebra booleana de subconjuntos. Reciprocamente, dadas as operações $\vee, \wedge, \setminus$, obtemos a soma (e o produto): $a_1 + a_2 := (a_1 \setminus a_2) \vee (a_2 \setminus a_1)$. Em particular, podemos (mas não iremos) escrever uma axiomática para álgebras booleanas em termos das operações $\vee, \wedge, \setminus$.

Dada uma família finita de elementos $a_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, n$, denotamos $\vee_{i=1}^n a_i := a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ e $\wedge_{i=1}^n a_i := a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$. Dizemos que os elementos $a_1, a_2 \in A$ são *disjuntos* se $a_1 \wedge a_2 = 0$ e escrevemos

[3] De fato, seguindo às ideias de Arquimedes que, em sua época, não tinha a tecnologia necessária para realizar seu projeto.

$\sqcup_{i=1}^n a_i := a_1 \sqcup a_2 \sqcup \cdots \sqcup a_n := \vee_{i=1}^n a_i$ quando os a_i's são dois a dois disjuntos. Particularmente, $a_1 \sqcup a_2$ significa $a_1 \vee a_2$ com $a_1 \wedge a_2 = 0$.

2.3. Exercício. Mostre que $a_1 \wedge a_2$ e $a_1 \vee a_2$ são respectivamente os ínfimo e supremo de a_1, a_2.

As operações $\vee, \wedge, \setminus$ satisfazem várias identidades que utilizaremos com frequência e que apresentamos abaixo. Uma receita para entender se uma certa identidade é válida é imaginá-la em uma álgebra booleana de subconjuntos,[4] em termos das operações $\cup, \cap, \setminus$.

2.4. Exercício (fórmulas básicas)**.** Seja A uma álgebra booleana e sejam $a, a_1, a_2, a_3 \in A$. Temos: $a \vee a = a$, $a_1 \vee a_2 = a_2 \vee a_1$, $a_1 \vee (a_2 \vee a_3) = (a_1 \vee a_2) \vee a_3$, $(a_1 \vee a_2) \wedge a_3 = (a_1 \wedge a_3) \vee (a_2 \wedge a_3)$, $(a_1 \wedge a_2) \vee a_3 = (a_1 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee a_3)$, $a_1 \wedge (a_2 \setminus a_3) = (a_1 \wedge a_2) \setminus (a_1 \wedge a_3)$, $a_2 \geqslant a_3 \Rightarrow a_1 \setminus a_2 \leqslant a_1 \setminus a_3$, $a_1 \setminus (a_1 \setminus a_2) \leqslant a_2$.

A subálgebra *gerada* por um subconjunto de uma álgebra booleana é a menor subálgebra booleana que contém tal subconjunto.

O produto $\prod_{i \in I} A_i$ de álgebras booleanas é uma álgebra booleana. É fácil ver que as operações $\vee, \wedge, \setminus$, bem como a ordem $\leqslant$, se calculam coordenada a coordenada. Cada A_i pode ser visto como uma subálgebra do produto. Assim, quando o produto é finito, podemos escrever $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ ao invés de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Seja A uma álgebra booleana e seja $a \in A$. Temos a decomposição $A = a \wedge A + (1 + a) \wedge A = a \wedge A \times (1 + a) \wedge A$, onde $(1 + a) \wedge A := \{x + a \wedge x \mid x \in A\}$.

2.5. Definição. Seja A uma álgebra booleana. Uma função $\mu : A \to \mathbb{R} \cup \infty$ é dita *finito-aditiva* se $\mu a_1 + \mu a_2 = \mu(a_1 \sqcup a_2)$ para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ disjuntos. Uma função finito-aditiva $\mu : A \to [0, \infty]$ se chama uma *medida* finito-aditiva; neste caso, denotamos $I_\mu := \{a \in A \mid \mu a = 0\}$.

A aditividade é uma condição natural se queremos que a função μ meça "volume". Entretanto, como observou ainda Arquimedes, aditividade finita não é suficiente para calcular volumes de poliedros tridimensionais ou de figuras curvilíneas. Para isto, é necessário exigir *aditividade enumerável* (chamada σ-aditividade). Ainda assim, em algumas situações, a aditividade finita é suficiente. Isto ocorre, por exemplo, no caso da álgebra de polítopos em $\mathbb{R}^2$, a qual será estudada na próxima Seção 4.

2.6. Exercício. Mostre que uma função $\mu : A \to \mathbb{R} \cup \infty$ sobre uma álgebra booleana A é finito-aditiva se e só se $\mu 0 = 0$ e $\mu a_1 + \mu a_2 = \mu(a_1 \vee a_2) + \mu(a_1 \wedge a_2)$ para todos $a_1, a_2 \in A$ ou, equivalentemente, se e só se $\mu a_1 + \mu a_2 = \mu(a_1 + a_2) + 2\mu(a_1 \wedge a_2)$ para todos $a_1, a_2 \in A$. (Dica: considere os elementos dois a dois disjuntos $a_1 \setminus a_2, a_2 \setminus a_1, a_1 \wedge a_2$.)

2.7. Exercício. Mostre que uma medida finito-aditiva $\mu : A \to [0, \infty]$ é necessariamente monótona com relação à ordem parcial, isto é, $a_1 \leqslant a_2 \Rightarrow \mu a_1 \leqslant \mu a_2$. Mostre que $I_\mu \triangleleft A$.

Podemos definir um espaço métrico M com $\mathrm{d} : M \times M \to [0, \infty]$, isto é, podemos permitir que a função distância d também assuma o valor ∞. Tal M pode ser visto como uma união disjunta de componentes, cada qual um espaço métrico usual, com a distância ∞ entre pontos de componentes distintas. É fácil ver que o completamento de tal espaço métrico é nada mais do que a união disjunta dos completamentos das componentes.

Seja M um espaço métrico. Uma operação *k-nária* $f : M^k \to M$ é dita *Lipschitz contínua*[5] se $\mathrm{d}(fp, fq) \leqslant l \cdot \sum_{i=1}^k \mathrm{d}(p_i, q_i)$ para para todos $p, q \in M^k$ e para alguma constante $l \geqslant 0$.

[4] Uma álgebra booleana finitamente gerada é isomorfa a 2^F para algum conjunto finito F.

[5] Em geral, uma função $f : M_1 \to M_2$ entre espaços métricos M_1, M_2 é Lipschitz contínua se $\mathrm{d}(fp, fq) \leqslant l \cdot \mathrm{d}(p, q)$ para todos $p, q \in M_1$, onde $l \geqslant 0$ é uma constante. Por simplicidade, em nosso caso particular, munimos o produto M^k da L^1-*métrica* $\mathrm{d}\left(p, q\right) := \sum_{i=1}^k \mathrm{d}(p_i, q_i)$ (mas poderíamos utilizar qualquer métrica que induz em M^k a topologia do produto).

2.8. Proposição. *Seja $\mu : A \to [0, \infty]$ uma medida finito-aditiva sobre uma álgebra booleana A e seja $I_\mu \lhd A$ o ideal de elementos de medida nula. A fórmula* $\mathrm{d}(a_1, a_2) := \mathrm{d}(a_1 + I_\mu, a_2 + I_\mu) := \mu(a_1 + a_2)$ *define uma métrica* $\mathrm{d} : (A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \to [0, \infty]$ *tal que as operações* $+, \vee, \wedge, \setminus$ *são Lipschitz contínuas em* A/I_μ.

Demonstração. De

$$\mu(a_1 + a_2) + \mu(a_2 + a_3) = \mu(a_1 + a_3) + 2\mu\big((a_1 + a_2) \wedge (a_2 + a_3)\big) \geqslant \mu(a_1 + a_3)$$

segue a desigualdade triangular. Claro que $\mathrm{d}(a_1, a_2) = 0$ se e só se $a_1 + a_2 \in I_\mu$. Quanto à continuidade Lipschitz, basta lidar com as operação binárias $(A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \xrightarrow{+,\wedge} A/I_\mu$. No caso da soma, temos $\mathrm{d}(a_1 + a_2, a_1' + a_2') = \mu(a_1 + a_2 + a_1' + a_2') \leqslant \mu(a_1 + a_1') + \mu(a_2 + a_2') = \mathrm{d}(a_1, a_1') + \mathrm{d}(a_2, a_2')$. Finalmente, notando que $\mu(a \wedge b) \leqslant \mu a$ pela monotonicidade de μ (Exercício 2.7), obtemos

$$\mathrm{d}(a_1 \wedge a_2, a_1' \wedge a_2') = \mu(a_1 \wedge a_2 + a_1' \wedge a_2') = \mu\big((a_1 + a_1') \wedge a_2 + a_1' \wedge (a_2 + a_2')\big) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\big((a_1 + a_1') \wedge a_2\big) + \mu\big(a_1' \wedge (a_2 + a_2')\big) \leqslant \mu(a_1 + a_1') + \mu(a_2 + a_2') = \mathrm{d}(a_1, a_1') + \mathrm{d}(a_2, a_2') \ \blacksquare$$

2.9. Exercício. Se um espaço métrico M está munido de uma operação k-nária Lipschitz contínua,[6] então tal operação admite uma única extensão contínua para o completamento de M.

2.10. Corolário. *Nas condições da proposição anterior, o completamento $\hat{A}_\mu$ do espaço métrico A/I_μ é uma álgebra booleana com as operações contínuas* $\blacksquare$

Álgebras booleanas são extremamente úteis na lógica e na computação, pois descrevem quaisquer sistemas de afirmações lógicas não-contraditórias. Nesta interpretação, $0, 1, \neg, \vee, \wedge, +$ significam respectivamente "falso", "verdadeiro", "negação", "e", "ou", "ou exlusivo". A descrição algébrica de processos lógicos parece, hoje em dia, uma trivialidade; no entanto, no século XIX, este foi um dos temas centrais da metafísica, lógica e matemática. A descrição algébrica inventada por Boole representou o fim de um processo de centenas de anos de intensas pesquisas de pensamento metafísico (iniciadas, talvez por Aristóteles).

De Morgan assim afirmou sobre as revolucionárias pesquisas de Boole:

... *isto, que os processos simbólicos descobertos por algebristas para cálculos numéricos são aplicáveis para expressar cada movimento do pensamento e representam gramática e dicionário para um amplo sistema lógico, parecia impossível até o momento em que ainda não havia sido provado. Quando Hobbes publicou seu livro "A lógica do cálculo", ele estava apenas tendo um vislumbre distante de algumas das ideias que foram iluminadas no trabalho do Sr. Boole.*

George Boole foi autodidata e não tinha educação formal. Seu pai, John Boole, sapateiro, foi cientista amador e, em vez de trabalhar com calçados, passava o tempo realizando experimentos científicos. Por isto, sua família foi pobre. Tendo observado no seu filho germes de genialidade, John Boole começou a ensiná-lo a matemática e a construção de instrumentos ópticos. Aos 14 anos, John Boole, por si, estudou grego e publicou sua própria tradução do poeta Meleager.

Boole era o filho mais velho da família. Quando completou 16, teve que conseguir um emprego para sustentar os pais, irmãos e irmã, os quais haviam empobrecido totalmente. Entretanto, ele continuou suas atividades científicas e, sozinho, estudou análise matemática. Em seguida, ele publicou (com a ajuda de de Morgan) alguns artigos científicos dedicados à aplicação de métodos algébricos em análise e, por essas publicações, recebeu a medalha da Sociedade Real e depois virou professor.

[6] Ainda menos, basta uniformemente contínua.

Mais próximo ao fim da vida (ele viveu pouco), Boole tornou-se notável por conta de suas revolucionárias pesquisas em lógica. Ele foi indicado doutor *honoris causa* das universidades de Oxford e Dublin e tornou-se um acadêmico (mais exatamente, um membro da Sociedade Real).

Boole morreu de um resfriado aos 49 anos de idade. Saindo de casa para dar aulas, tomou chuva e apresentou suas aulas absolutamente molhado. Voltou para casa com febre alta; a esposa de Boole, Mary Everest (sobrinha do primeiro descobridor do Monte Everest), era inclinada a métodos não-tradicionais de medicina e estava curando similar por similar. Ela o colocou na cama e jogou vários baldes de água fria em cima do acadêmico, considerando que isto iria ajudá-lo a se curar. Mas Boole, ao invés disso, morreu.

George Boole
2 de novembro de 1815 – 8 de dezembro de 1864

Boole tinha 5 filhas, uma das quais tornou-se notável como Ethel Lilian Voynich, autora de "O moscardo" ("The Gadfly"), um popular romance sobre revolucionários.

2E. Exercícios

1. Uma família de subconjuntos em 2^C é uma álgebra booleana de subconjuntos se e só se a correspondente família de funções características é uma subálgebra booleana de 2^C.

2.* Mostre que toda álgebra booleana finitamente gerada é isomorfa a 2^F para algum conjunto finito F. (Dica: Um *átomo* é um elemento minimal não-nulo. Encontre um átomo da forma $a = g_{i_1} \wedge \cdots \wedge g_{i_k}$, onde os g_i's são geradores, decomponha $A = a \wedge A \sqcup (1 + a) \wedge A$ e proceda por indução em $(1 + a) \wedge A$.)

3.* Seja $G \subset 2^C$ com $|G| = n$. Qual é a cardinalidade máxima da subálgebra booleana gerada por G ?

3. Álgebra de polítopos

Se Janus parece um exemplo mais simples possível de um poliedro,
qual seria o exemplo mais simples possível de um polítopo?
— *Pensamentos pornográficos*

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se o segmento que liga quaisquer dois pontos de C está inteiramente contido em C. É claro que a interseção de uma família de conjuntos convexos é um conjunto convexo. O envelope convexo de $n+1$ pontos em $\mathbb{R}^n$ não contidos em um hiperplano é dito um *simplexo.*

3.1. Definição. A interseção limitada (portanto, compacta) de um número finito de semi-espaços fechados é dita um *polítopo convexo* em $\mathbb{R}^n$. Um *polítopo fechado* é uma união finita de polítopos convexos. Um elemento da álgebra booleana $\mathcal{P}$ gerada por polítopos convexos se chama um *polítopo.* Um polítopo é *degenerado* se está contido na união de um número finito de hiperplanos. Um polítopo fechado é *fortemente não-degenerado* se é uma união finita de polítopos convexos não-degenerados.

Denotamos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os polítopos fechados, por $\mathcal{I}$ o conjunto de todos os polítopos degenerados e por $\mathcal{F}_0$ o conjunto de todos os polítopos fechados fortemente não-degenerados.

Uma combinação linear finita da forma $\sum c_i p_i$, onde $\sum c_i = 1$ e $c_i \geqslant 0$ para cada i, é dita uma *combinação convexa.* (Observe que, reescolhendo a origem do espaço linear, o ponto descrito por uma combinação convexa não muda.)

3.2. Exercício. Mostre que o envelope convexo de uma coleção finita de pontos é formado por todas as combinações convexas destes pontos. (De fato, a finitude da coleção é desnecessária.)

3.3. Exercício. Mostre que um simplexo (não-degenerado, como definido) é um polítopo convexo não-degenerado.

3.4. Exercício. Mostre que cada polítopo convexo com interior vazio é degenerado.

3.5. Exercício. Todo polítopo convexo não-degenerado P é o fecho do seu interior, $P = \overline{\operatorname{Int} P}$.

3.6. Exercício. Mostre que $\mathcal{I} \lhd \mathcal{P}$ e que $\mathcal{P} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{I}$. (Dica: Sejam $P_1, P_2 \in \mathcal{F}_0$ polítopos convexos tais que $P_2 = \bigcap_{i=1}^k S_i$, onde os S_i's são semi-espaços fechados. Observe que $P_1 \setminus P_2 = \bigcup_{i=1}^k (P_1 \cap S_i')$, onde S_i' é o semi-espaço aberto "complementar" a S_i.)

3.7. Exercício. Mostre que o fecho de um polítopo é um polítopo fechado.

3.8. Exercício. Dado um polítopo $P \in \mathcal{P}$, mostre que existe um polítopo aberto $A \subset P$ tal que $\overline{P} \setminus A$ é um polítopo degenerado, $\overline{P} \setminus A \in \mathcal{I}$. (Se P é convexo, $\operatorname{Int} P$ serve como o aberto A.)

3.9. Definição. Uma *partição* de um polítopo $P \in \mathcal{F}_0$ é uma decomposição de P na união de polítopos $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{F}_0$ cujas interseções dois a dois são polítopos degenerados. A partição é uma *triangulação* se os P_i's são simplexos.

Uma partição é um *refinamento* de outra quando polítopos que participam na primeira constituem partições de todos os polítopos que participam da segunda.

3.10. Teorema. *Todo polítopo $P \in \mathcal{F}_0$ admite uma partição em polítopos convexos não-degenerados e, mais ainda, uma triangulação.*

Demonstração. O polítopo P é a união finita de polítopos convexos não-degenerados $P_1, P_2, \dots$. Sejam $H_1, H_2, \dots$ os hiperplanos que participam na formação dos P_i's e sejam S_i, S_i' os correspondentes semi-espaços fechados. A partição em questão será formada por algumas interseções do tipo $S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k} \cap S'_{j_1} \cap \dots \cap S'_{j_l}$. Mais detalhadamente, se H_1 intercepta o interior de um P_i, fazemos a partição de P_i em dois polítopos convexos (caso contrário, mostre que $P_i \subset S_1$ ou $P_i \subset S_1'$). Repetindo este processo com H_2 e com a recém obtida coleção de polítopos e assim por diante, chegamos à partição desejada. (Note que, a cada passo, não surgem novos hiperplanos e a quantidade de hiperplanos que interceptam interiores de polítopos diminui.) Resta triangular os polítopos convexos não-degenerados.

Seja $Q \in \mathcal{F}_0$ um polítopo convexo. Tomemos $p \in \operatorname{Int} Q$. Seja H um hiperplano participando na formação de Q. Se $Q \cap H$ é um polítopo não-degenerado em H (os demais hiperplanos podem ser descartados na formação de Q, pois cada um destes contém a interseção de outros dois), então admite, por indução, uma triangulação em simplexos $T_1, T_2, \dots \subset Q \cap H$. Os envelopes convexos de p e cada um dos simplexos T_i constituem os simplexos da triangulação procurada de Q ∎

3.11. Exercício. Usando ideias da demonstração da primeira parte do Teorema 3.10, mostre que duas triangulações admitem uma triangulação que refina ambas.

Seja $b_1, \dots, b_n$ uma base ortonormal em $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\Lambda := \mathbb{Z}b_1 + \dots + \mathbb{Z}b_n$ o reticulado gerado pela base e por $\varepsilon\Lambda$ o reticulado Λ esticado ε vezes. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\underline{N}_{\varepsilon\Lambda}S$ o número de ε-cubos com vértices em $\varepsilon\Lambda$ contidos em S e por $\overline{N}_{\varepsilon\Lambda}S$ o número de ε-cubos com vértices em $\varepsilon\Lambda$ que interceptam S. Definimos $\underline{V}_{\varepsilon\Lambda}S := \varepsilon^n \underline{N}_{\varepsilon\Lambda}S$ e $\overline{V}_{\varepsilon\Lambda}S := \varepsilon^n \overline{N}_{\varepsilon\Lambda}S$, os ε-volumes *interior* e *exterior* de S. É fácil ver que as funções $k \mapsto \underline{V}_{2^{-k}\Lambda}S$ e $k \mapsto \overline{V}_{2^{-k}\Lambda}S$ são monótonas respectivamente crescente e decrescente (não estritamente). Os correspondentes limites $\underline{V}_\Lambda S \leqslant \overline{V}_\Lambda S$ são respectivamente os volumes *interior* e *exterior* de S.

3.12. Lema. *Se P é um polítopo degenerado, então $\overline{V}_\Lambda P = 0$.*

Demonstração. Basta considerar um polítopo contido em um hiperplano H. Seja $v := (c_1, \dots c_n)$ um vetor unitário normal a H. Podemos supor que $c_n = \max_i |c_i|$. Logo, $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant c_n$. Denotamos por $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ a projeção nas primeiras $n-1$ coordenadas. Vamos mostrar que $\overline{N}_{\varepsilon\Lambda}P \leqslant (n+1)\overline{N}_{\varepsilon\Lambda'}\pi P$, onde $\Lambda' = \mathbb{Z}b_1 + \dots + \mathbb{Z}b_{n-1}$. Para isto, basta observar que a "pilha" finita de ε-cubos que estão "em cima" de um dado ε-cubo em $\mathbb{R}^{n-1}$ e que interceptam H tem no máximo $n+1$ cubos. Se a pilha contém $l+1$ cubos e p_1, p_2 são pontos de interseção de cubos extremos da pilha com H, então $p_1 \pm l(0, \dots, 0, \varepsilon)$ e p_2 estão em um mesmo ε-cubo e, portanto, têm distância $\leqslant \varepsilon\sqrt{n}$ (o diâmetro do ε-cubo). Por outro lado, a distância entre H e $p_1 \pm l(0, \dots, 0, \varepsilon)$ é $\Big|\big\langle v, l(0, \dots, 0, \varepsilon)\big\rangle\Big| = c_n l\varepsilon$. Portanto, $c_n l\varepsilon \leqslant \varepsilon\sqrt{n}$ e $l \leqslant n$.

Agora, $\overline{V}_{2^{-k}\Lambda}P = 2^{-kn}\overline{N}_{2^{-k}\Lambda}P \leqslant 2^{-kn}(n+1)\overline{N}_{2^{-k}\Lambda'}\pi P = 2^{-k}(n+1)\overline{V}_{2^{-k}\Lambda'}\pi P \to 0$, pois $\overline{V}_{2^{-k}\Lambda'}\pi P$ é limitada ∎

3.13. Corolário. *Para qualquer polítopo P, temos $\underline{V}_\Lambda P = \overline{V}_\Lambda P$.*

Demonstração. Pelo Exercício 3.8, $Q := \overline{P} \setminus A$ é um polítopo degenerado para algum polítopo aberto A. Cada 2^{-k}-cubo que intercepta P mas não está contido em P intercepta Q. Logo, $0 \leqslant \overline{V}_{2^{-k}\Lambda}P - \underline{V}_{2^{-k}\Lambda}P \leqslant \overline{V}_{2^{-k}\Lambda}Q$ ∎

Denotamos por $V_\Lambda P := \underline{V}_\Lambda P = \overline{V}_\Lambda P$ o *volume* do polítopo P.

3.14. Teorema. *A função $V_\Lambda : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ é uma medida finito-aditiva na álgebra de polítopos $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Sejam $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ polítopos disjuntos, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. Então $\underline{N}_{2^{-k}\Lambda}P_1 + \underline{N}_{2^{-k}\Lambda}P_2 \leqslant \underline{N}_{2^{-k}\Lambda}(P_1 \cup P_2)$ e $\overline{N}_{2^{-k}\Lambda}(P_1 \cup P_2) \leqslant \overline{N}_{2^{-k}\Lambda}P_1 + \overline{N}_{2^{-k}\Lambda}P_2$, implicando $\underline{V}_\Lambda P_1 + \underline{V}_\Lambda P_2 \leqslant \underline{V}_\Lambda(P_1 \cup P_2)$ e $\overline{V}_\Lambda(P_1 \cup P_2) \leqslant \overline{V}_\Lambda P_1 + \overline{V}_\Lambda P_2$ ∎

3.15. Exercício. Mostre que o grupo $\operatorname{SL}\mathbb{R}^n$ é gerado por *transformações elementares,* isto é, por matrizes que diferem da matriz identidade por uma única entrada fora da diagonal.

Seja G um grupo agindo em $\mathbb{R}^n$. Polítopos $P, Q \in \mathcal{F}_0$ são *G-equicompostos* se existem partições $P_1, \dots, P_k$ de P e $Q_1, \dots, Q_k$ de Q tais que P_i é G-congruente a Q_i para todo i.

3.16. Teorema. *A função V_Λ é invariante pelas ações de translações e do grupo $\operatorname{SL}\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. É fácil notar que o volume do paralelepípedo coordenado é o usual. Para cada polítopo P, temos polítopos P_0, P_1 que admitem partições em 2^{-k}-cubos com vértices em $2^{-k}\Lambda$ tais que $P_0 \subset P \subset P_1$ e tais que $V_\Lambda P_1 - V_\Lambda P_0$ é arbitrariamente pequeno (para k suficientemente grande). Assim, basta mostrar que o volume de qualquer paralelepípedo coordenado é invariante pelas ações em questão. Portanto, já temos a invariância pelas translações. Daí concluímos que os polítopos paralelamente equicompostos têm mesmos volumes. A imagem EP de um paralelepípedo coordenado P por uma transformação elementar $E \in \mathrm{SL}\,\mathbb{R}^n$ é paralelamente equicomposta a P (faça um desenho para $n = 2$ para entender isto). Logo, $V_\Lambda EP = V_\Lambda P$. Resta lembrar que o grupo $\mathrm{SL}\,\mathbb{R}^n$ é gerado pelas transformações elementares ■

3E. Exercícios

1.* Mostre que o envelope convexo P de uma coleção de $n+2$ pontos $p_0, \dots, p_{n+1}$ em $\mathbb{R}^n$ é a união dos envelopes convexos de todas as subcoleções de $n+1$ pontos. (Dica: Tome p_0 como a origem. Portanto, os pontos de P têm a forma $\sum_{i=1}^{n+1} c_i p_i$ onde $\sum_{i=1}^{n+1} c_i \leqslant 1$ e $c_i \geqslant 0$ para todo i. Existe uma dependência linear $\sum_{i=1}^{n+1} d_i p_i = 0$ com $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 1$ ou $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 0$. Mostre que existe $x \in \mathbb{R}$ (não-positivo no primeiro caso) tal que $c_i + x d_i \geqslant 0$ para todo i e $c_i + x d_i = 0$ para algum i.)

2. Mostre que o envelope convexo de uma coleção finita de pontos que não ficam em um mesmo hiperplano é união de simplexos.

3.* Mostre que todo polítopo convexo não-degenerado é interseção finita de simplexos.

4.* Mostre que qualquer polítopo $P \in \mathcal{P}$ é da forma $P = F \setminus I$ com F fechado e I degenerado, $F \in \mathcal{F}$ e $I \in \mathcal{I}$.

5.** Mostre que todo polítopo convexo é o envelope convexo de uma coleção finita de pontos. (Este é o *teorema fundamental da teoria dos polítopos*.)

6. Um *simplexo degenerado* em $\mathbb{R}^n$ é o envelope convexo de $n+1$ pontos contidos em um hiperplano. Mostre que o envelope convexo dos pontos $p_0, \dots, p_n$ em $\mathbb{R}^n$ é um simplexo degenerado se e só se $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_n - p_0$ são linearmente dependentes. Será que o volume de simplexos tem uma relação com determinantes?

7. Seja μ uma medida finito-aditiva na álgebra booleana $\mathcal{P}$ de polítopos em $\mathbb{R}^n$. Suponha que μ é invariante por isometrias. Mostre que $\mu\mathcal{I} = 0$.

8. Seja μ uma medida finito-aditiva na álgebra booleana $\mathcal{P}$ de polítopos em $\mathbb{R}^n$. Suponha que μ é invariante por isometrias e que $\mu C = 1$, onde $C \subset \mathbb{R}^n$ é o cubo unitário coordenado. Mostre que $\mu C_a = a^n$, onde C_a é o a-cubo coordenado. Conclua que $\mu = V_\Lambda$.

9. Mostre que "ser G-equicomposto" é uma relação de equivalência.

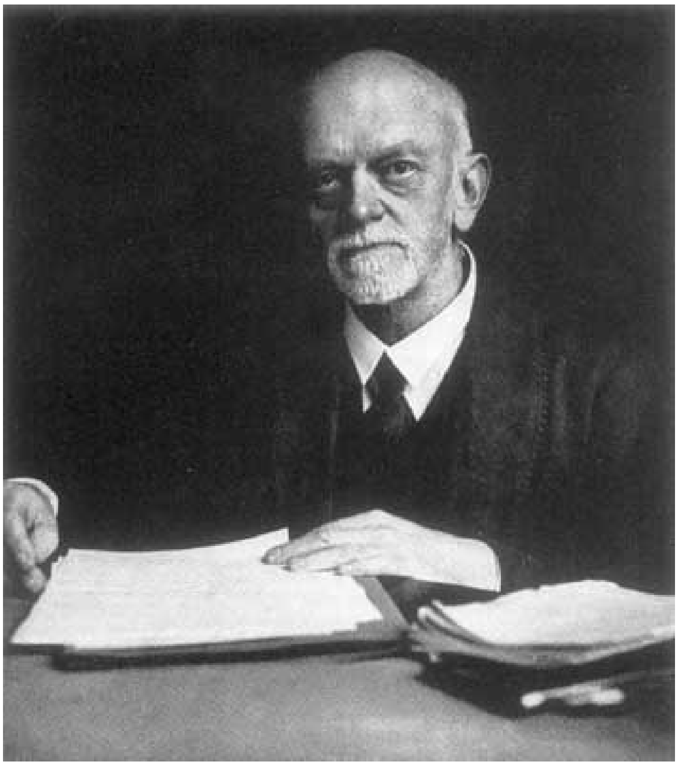
4. Terceiro problema de Hilbert

Dois pesos, duas medidas.
— *Da teoria rural da medida*

O próprio Hilbert formulou o seu "terceiro problema" assim:

Em duas cartas a Gerling, Gauss expressa seu lamento que certos teoremas da geometria sólida dependem do método da exaustão, ou seja, na fraseologia moderna, do axioma da continuidade (*ou do axioma de Arquimedes*)*. Gauss menciona em particular o teorema de Euclides segundo o qual os volumes de pirâmides triangulares com alturas iguais estão na mesma proporção que as áreas das suas bases. Atualmente, o análogo problema plano já foi resolvido. Gerling também teve sucesso em provar* *a igualdade de volumes de poliedros simétricos através da divisão de tais poliedros em partes congruentes. Entrentanto, parece-me provável que, no caso geral, uma demonstração do teorema de Euclides é impossível, e deveria ser nossa tarefa dar uma demonstração rigorosa desta impossibilidade. Isto seria obtido* indicando-se dois tetraedros com bases iguais e alturas iguais que de modo nenhum podem ser decompostos em tetraedros congruentes, e que também não podem ser combinados com tetraedros congruentes para formar dois novos poliedros os quais, por sua vez, podem ser quebrados em tetraedros congruentes.

(Mathematical Problems, David Hilbert, palestra apresentada no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, 1900)



David Hilbert
23 de janeiro de 1862 – 14 de fevereiro de 1943

Simplificando um pouco, o mesmo pode ser exposto assim:

4.1. Terceiro problema de Hilbert. Construa em $\mathbb{R}^3$ dois polítopos de mesmo volume que não são G-equicompostos, onde G denota o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$.

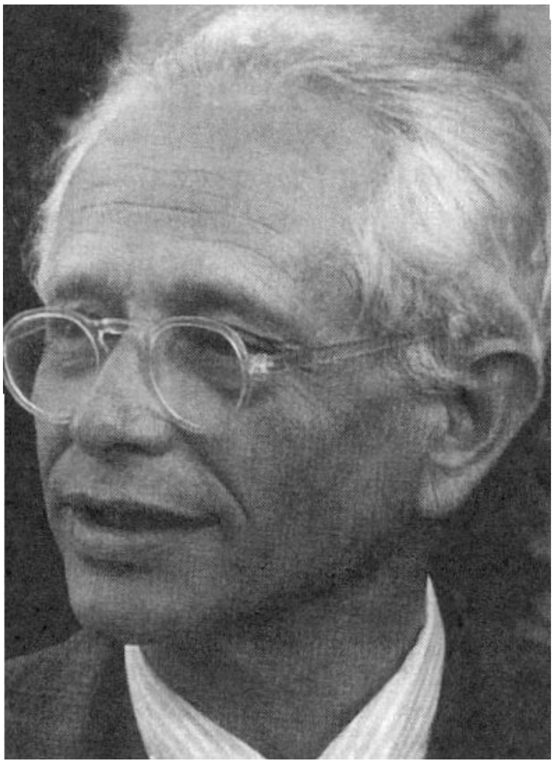
A solução deste problema, apresentada abaixo, foi obtida pela primeira vez em 1900 por Max Dehn.

Seja P um polítopo convexo não-degenerado em $\mathbb{R}^3$.

Se um plano F participando na formação de P é tal que $F \cap P$ tem interior não-vazio em F, então $F \cap P$ é dito uma *face* de P. Indutivamente, obtemos as *arestas* e os *vértices* de P.

Denotemos por $\ell_1, \dots, \ell_n$ os comprimentos das arestas $a_1, \dots, a_n$ de P e por $d_1, \dots, d_n$ os correspondentes ângulos diedrais. Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções $\mathbb{Q}$-lineares com $\psi\pi = 0$. Definimos o *invariante de Dehn* do polítopo P pela expressão $DP := D_{\varphi,\psi}P := \sum_{i=1}^n \varphi\ell_i \cdot \psi d_i$.

Cortamos P por um plano H em dois polítopos P_1, P_2. Se uma aresta a_i de P fica inteiramente contida em H, os correspondentes ângulos diedrais de P_1 e P_2 em a_i têm como soma o ângulo diedral de P em a_i. Logo, a soma das contribuições de a_i para DP_1 e DP_2 é igual à contribuição de a_i para DP. Se, em outro caso, uma aresta a_i de P é cortada por H em duas partes $a_i' \subset P_1$ e $a_i'' \subset P_2$, o ângulo diedral de P_1 em a_i' será igual ao ângulo diedral de P_2 em a_i''. Novamente, somando a contribuição de a_i' para DP_1 com a contribuição de a_i'' para DP_2, obtemos a contribuição de a_i para DP. Finalmente, para todas as outras arestas de P_1 e P_2 contidas em H, a soma dos correspondentes ângulos diedrais é π; portanto, a soma das contribuições dessas arestas para DP_1 e DP_2 se anula, pois $\psi\pi = 0$. Concluímos que $DP = DP_1 + DP_2$, ou seja, que o invariante de Dehn é aditivo relativamente à colagem de polítopos convexos não-degenerados ao longo de uma face comum.



Max Dehn
13 de novembro de 1878 – 27 de junho de 1952

Será que podemos utilizar esta construção para introduzir o invariante de Dehn de um polítopo fortemente não-degenerado qualquer? Para isto, precisamos reduzir as considerações ao caso convexo, o que pode ser feito de modo industrial em uma

4.2. Refinaria. Seja S um simplexo (não-degenerado, como foi definido) em $\mathbb{R}^n$ gerado por $n+1$ pontos. Um *subsimplexo* de S é qualquer simplexo gerado por uma subcoleção destes pontos. Uma *triangulação forte* de um polítopo fortemente não-degenerado $P \in \mathcal{F}_0$ é uma triangulação de P em simplexos não-degenerados $S_1, \ldots, S_k$ cujas interseções dois a dois $S_i \cap S_j$ são subsimplexos comuns a S_i e a S_j.

4.2.1. Exercício. Mostre que todo polítopo fortemente não-degenerado $P \in \mathcal{F}_0$ admite uma triangulação forte.

Introduzimos o invariante de Dehn de um polítopo fortemente não-degenerado P em $\mathbb{R}^3$ do seguinte modo: tomamos uma triangulação forte de P e somamos os invariantes de Dehn de cada tetraedro que participa da triangulação. Já sabemos que o invariante de Dehn é aditivo relativamente a triangulações fortes de tetraedros; assim, para entender que a definição de invariante de Dehn de P independe da triangulação forte escolhida, basta resolver o seguinte

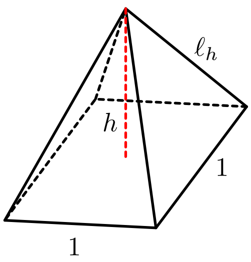
4.2.2. Exercício. Duas triangulações fortes de um polítopo fortemente não-degenerado $P \in \mathcal{F}_0$ admitem uma triangulação forte que refina ambas.

Finalmente, na solução do terceiro problema de Hilbert, utilizaremos o

4.2.3. Exercício. Sejam $P, Q \in \mathcal{F}_0$ polítopos fortemente não-degenerados. Mostre que P e Q são G-equicompostos se e só se admitem triangulações fortes $P_1, \dots, P_k$ e $Q_1, \dots, Q_k$ tais que cada simplexo P_i é G-congruente a Q_i.

Para resolver o terceiro problema de Hilbert, passando pela refinaria, basta exibir em $\mathbb{R}^3$ dois polítopos de mesmo volume cujos invariantes de Dehn são distintos.

O invariante de Dehn de um paralelepípedo reto é zero, pois todos os ângulos diedrais valem $\pi/2$ e $\psi(\pi/2) = 0$. Por outro lado, seja P_h uma pirâmide simétrica com base quadrada, altura h e aresta na base de comprimento 1. Nessa pirâmide há dois tipos de arestas: as quatro de comprimento 1 na base e as quatro de comprimento ℓ_h ligando a base ao ápice. Denotamos os ângulos diedrais nestas últimas por d_h. Escolhendo φ de modo que $\varphi 1 = 0$, obtemos $D_{\varphi,\psi} P_h = 4\varphi\ell_h \cdot \psi d_h$. Podemos ainda escolher φ e ψ de modo que $\ker\varphi = \mathbb{Q}$ e $\ker\psi = \mathbb{Q}\pi$. Deste modo, $\varphi\ell_h \cdot \psi d_h = 0$ apenas se ℓ_h ou d_h/π são racionais. Sendo ℓ_h e d_h monótonos em h, ℓ_h pode ser racional apenas para uma coleção enumerável de h's; o mesmo vale para d_h/π. Tomando h fora de tais conjuntos enumeráveis, encontramos uma pirâmide P_h cujo invariante de Dehn $D_{\varphi,\psi}$ é não-trivial.



Hilbert anunciou a lista de dez problemas no Congresso Internacional de Matemáticos de Paris em 1900. Em seguida, ele adicionou à lista outros treze problemas. Nasciam os famosos "23 problemas de Hilbert".

O terceiro problema de Hilbert foi resolvido em 1900 por Max Dehn, aluno de Hilbert, em sua tese "Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck" (Teorema de Legendre sobre a soma de ângulos de triângulos). Em seguida, Dehn tornou-se um dos fundadores da topologia e da teoria de grupos contemporâneas.

Após a chegada dos nazistas ao poder, Dehn foi demitido da sua posição de professor da Universidade de Frankfurt e, em 1940, ele teve que migrar para a América (via Escandinávia, Rússia e Japão). Na América, durante muito tempo, Dehn não conseguiu encontrar emprego. Enfim, foi contratado em uma escola de artes chamada Black Mountain College, onde o seu salário inicial foi de 25 dólares por mês (embora, mais tarde, tenha aumentado até 40). Como não havia alunos de matemática, Dehn tinha que ministrar palestras sobre a natureza matemática dos ornamentos. Ele ficou no Black Mountain College até sua morte em 1952 e foi por toda história o único professor de matemática deste colégio (fechado em 1956).

Outros professores do Black Mountain College foram Buckminster Fuller e o famoso compositor John Cage.

Em $\mathbb{R}^2$, ocorre que ter mesmo volume significa ser equicomposto por isometrias (vide o Exercício 4E.1). Em outras palavras, não existe em $\mathbb{R}^2$ uma medida finito-aditiva invariante por isometrias que diferencie polítopos de mesmo volume. Este é o teorema de Bolyai-Gerwien.

O teorema de Bolyai-Gerwien foi demonstrado por Farkas Bolyai (pai de János Bolyai, um dos descobridores da geometria não-euclidiana) em 1832 e por Paul Gerwien em 1833. O primeiro a publicar uma demonstração deste teorema foi o matemático escocês William Wallace, em 1807.

William Wallace
23 de setembro de 1768 – 28 de abril de 1843

O teorema de Dehn-Sydler (vide o Exercício 4E.9) afirma que, se P_1 e P_2 são polítopos em $\mathbb{R}^3$ de mesmo volume e com mesmos invariantes de Dehn, então P_1 e P_2 são equicompostos por isometrias.

A álgebra de polítopos módulo polítopos equicompostos, na dimensão > 3, ainda não é conhecida. Há várias hipóteses relacionando este assunto com motivos de Grothendieck, por exemplo:

I. Zakharevich, *Scissors congruence and K-theory,* tese de doutorado. Disponível em http://math.uchicago.edu/∼zakh/thesis.pdf

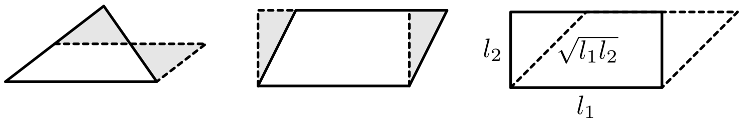
I. Zakharevich, *Scissors congruence as K-theory,* Homology, Homotopy and Applications, Volume 14 (2012), Número **1**, p. 181–202

I. Zakharevich, *Simplicial polytope complexes and developings of K-theory,* Homology, Homotopy and Applications, Volume 15 (2013), Número **2**, p. 301–330

I. Zakharevich, *A localization theorem for the K-theory of assemblers with an application to the Grothendieck spectrum of varieties,* preprint. Disponível em http://arxiv.org/abs/1401.3712

4E. Exercícios

1. Demonstre o teorema de Bolyai-Gerwien: Para polítopos em $\mathbb{R}^2$, "ter mesmo volume" e "ser G-equicomposto" são conceitos equivalentes (G denota o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$). (Dica: Os desenhos



podem te ajudar a mostrar que triângulos são G-equicompostos a retângulos de mesma área. O segundo desenho, por exemplo, ilustra que todo paralelogramo é G-equicomposto a um retângulo de mesma base e mesma altura.)

2. Construa uma função $\mathbb{Q}$-linear $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não seja $\mathbb{R}$-linear. (Dica: use o axioma da escolha.)

3. Mostre que uma função $\mathbb{Q}$-linear como a do exercício anterior necessariamente manda alguns números positivos para números negativos.

Os exercícios 4–8 providenciam uma outra forma de resolver o terceiro problema de Hilbert.

4. Mostre que cada ângulo diedral de um tetraedro regular vale arccos $\frac{1}{3}$.

5. Suponha que $\cos(\pi\alpha) = 1/n$, onde $\alpha \in \mathbb{Q}$. Mostre que $e^{\pi k\alpha i} = \big(\frac{1}{n} + i\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\big)^k = 1$ para algum $k > 0$ inteiro.

6.* Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ é um domínio de fatoração única.

7. Prove que, para $n = 3$, a igualdade $\big(\frac{1}{n} + i\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\big)^k = 1$ para k inteiro implica $k = 0$.

8. Mostre que α/π é irracional, onde α denota o ângulo diedral de um tetraedro regular. Utilizando este fato, encontre um invariante de Dehn $D_{\varphi,\psi}$ que não se anula em tetraedros regulares.

9.** Demonstre o teorema de Dehn-Sydler: Sejam P_1, P_2 polítopos em $\mathbb{R}^3$ de mesmo volume. Suponha que $D_{\varphi,\psi}P_1 = D_{\varphi,\psi}P_2$ para todo invariante de Dehn $D_{\varphi,\psi}$. Mostre que P_1 e P_2 são G-equicompostos, onde G denota o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$.

5. σ-álgebras e integração

É uma pena que o Riemann não percebeu que, para ter integral,
não é necessário previamente particionar o conjunto.
— Bourbaki para Elefante na loja de louças

5.1. Definição. Uma álgebra booleana A é uma *σ-álgebra* se qualquer família enumerável de elementos $a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, possui supremo $\vee_i a_i$.

Um *homomorfismo* de σ-álgebras é um homomorfismo de álgebras booleanas que preserva supremos enumeráveis.

A menor σ-subálgebra que contém um subconjunto $S \subset A$ é dita *gerada* por S.

Uma σ-álgebra de conjuntos é uma álgebra booleana de conjuntos fechada relativamente a uniões enumeráveis.

A σ-álgebra gerada por todos os conjuntos abertos de um espaço topológico E se chama *σ-álgebra de Borel* de E.

Uma família $a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, é *disjunta* se $a_i \wedge a_j = 0$ para todos $i \neq j$. Denotamos $\sqcup_i a_i$ o supremo enumerável de uma família disjunta $a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$. A existência de supremos segue da existência de supremos para famílias disjuntas. Realmente, fazendo $b_1 := a_1$ e $b_i := (a_1 \vee \dots \vee a_i) \setminus (a_1 \vee \dots \vee a_{i-1})$ para $i > 1$, obtemos uma família disjunta b_i, $i \in \mathbb{N}$, tal que $\sqcup_i b_i = \vee_i a_i$. Por razão semelhante, é suficiente que existam os supremos de famílias crescentes $c_1 \leqslant \dots \leqslant c_k \leqslant \dots$

O lema a seguir pode ser imediatamente verificado no caso de uma σ-álgebra de conjuntos (planejamos utilizá-lo só neste caso).

5.2. Lema. *Sejam A uma álgebra booleana e $a_i, b_i, c_i, d_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\vee_i a_i, \vee_i b_i, \vee_i (c_{i+1} \setminus c_i)$ existem e tais que $c_i \leqslant c_{i+1}$ para todo i. Então*

1. $(\vee_i a_i) \wedge (\vee_j b_j) = \vee_{i,j}(a_i \wedge b_j)$

2. $c_1 + \vee_i (c_{i+1} \setminus c_i) = \vee_k c_k$

3. $\vee_i(d_1 \setminus d_{i+1}) = \vee_i\big((d_1 \wedge d_i) \setminus d_{i+1})\big)$ *se um (e, portanto, o outro) destes supremos existe. Neste caso, há o ínfimo da família* d_i, $i \in \mathbb{N}$, *e este é dado por* $\wedge_i d_i := d_1 \setminus \big(\vee_i (d_1 \setminus d_{i+1})\big)$.

Demonstração. O supremo $\vee_i a_i$ caracteriza-se pela seguinte propriedade: $(\vee_i a_i) \wedge a_j = a_j$ para todo j e, se algum $x \in A$ satisfaz $x \wedge a_i = a_i$ para todo i, então $x \wedge (\vee_i a_i) = \vee_i a_i$.

Para mostrar **1** é suficiente verificar que $(\vee_i a_i) \wedge b = \vee_i(a_i \wedge b)$. Temos $\big((\vee_i a_i) \wedge b\big) \wedge (a_j \wedge b) = (\vee_i a_i) \wedge a_j \wedge b = a_j \wedge b$ para todo j. Suponhamos que $x \wedge (a_j \wedge b) = a_j \wedge b$ para todo j. Então $(b + x \wedge b + \vee_i a_i) \wedge a_j = b \wedge a_j + b \wedge a_j + a_j = a_j$ para todo j, donde segue que $(b + x \wedge b + \vee_i a_i) \wedge (\vee_i a_i) = \vee_i a_i$, ou seja, $b \wedge (\vee_i a_i) + x \wedge b \wedge (\vee_i a_i) + \vee_i a_i = \vee_i a_i$. Em outras palavras, $x \wedge \big((\vee_i a_i) \wedge b\big) = (\vee_i a_i) \wedge b$.

Quanto a **2**, é claro que $(c_{i+1} \setminus c_i) \wedge c_k = 0$ se $i \geqslant k$ e $(c_{i+1} \setminus c_i) \wedge c_k = c_{i+1} \setminus c_i$ se $i < k$. Por **1**, $\big(c_1 + \vee_i(c_{i+1} \setminus c_i)\big) \wedge c_k = c_1 + \vee_{i=1}^{k-1}(c_{i+1} \setminus c_i) = c_1 + (c_2 \setminus c_1) + \cdots + (c_k \setminus c_{k-1}) = c_k$. Se $x \wedge c_k = c_k$ para todo k, então $x \wedge \big(c_1 + \vee_i(c_{i+1} \setminus c_i)\big) = c_1 + \vee_i\big(x \wedge (c_{i+1} + c_i \wedge c_{i+1})\big) = c_1 + \vee_i(c_{i+1} \setminus c_i)$.

Para provar **3**, note que o fato $x \geqslant d_1 \setminus d_{i+1}$ para todo i é equivalente a $x \geqslant (d_1 \wedge d_j) \setminus d_{j+1}$ para todo j, pois $d_1 \setminus d_{i+1} \geqslant (d_1 \wedge d_i) \setminus d_{i+1}$ e $\vee_{j=1}^{i}\big((d_1 \wedge d_j) \setminus d_{j+1}\big) \geqslant d_1 \setminus d_{i+1}$. Logo, $\vee_i(d_1 \setminus d_{i+1}) = \vee_i\big((d_1 \wedge d_i) \setminus d_{i+1})\big)$.

Obviamente, $d_1 \setminus \big(\vee_i (d_1 \setminus d_{i+1})\big) \leqslant d_1$. Em vista das fórmulas $x \wedge (y \setminus z) = (x \wedge y) \setminus (x \wedge z)$ e $y \geqslant z \Rightarrow d_1 \setminus y \leqslant d_1 \setminus z$ (vide o Exercício 2.4), segue de $\vee_i(d_1 \setminus d_{i+1}) \geqslant d_1 \setminus d_{j+1}$ que $d_1 \setminus \big(\vee_i (d_1 \setminus d_{i+1})\big) \leqslant d_1 \setminus (d_1 \setminus d_{j+1}) \leqslant d_{j+1}$. Se $x \leqslant d_i$ para todo i, isto é, se $x \wedge d_i = x$, então

$$x \wedge \Big(d_1 \setminus \big(\vee_i (d_1 \setminus d_{i+1})\big)\Big) = (x \wedge d_1) \setminus \Big(\vee_i \big((x \wedge d_1) \setminus (x \wedge d_{i+1})\big)\Big) = x \setminus \big(\vee_i (x \setminus x)\big) = x \blacksquare$$

5.3. Corolário. *Em qualquer* σ*-álgebra* A *existem ínfimos enumeráveis. Além disso, dada uma família enumerável* $a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, *temos, para todo* m,

1. $a_m + \wedge_{i \geqslant m} a_i \leqslant \vee_{i \geqslant m}(a_i + a_{i+1})$
2. $\wedge_{i \geqslant m} a_i + \vee_k(\wedge_{i \geqslant k} a_i) \leqslant \vee_{i \geqslant m}(a_i + a_{i+1})$.

Demonstração. Segue de $\wedge_{i \geqslant m} a_i = a_m \setminus \Big(\vee_{i \geqslant m} \big((a_m \wedge a_i) \setminus a_{i+1}\big)\Big)$ que $a_m + \wedge_{i \geqslant m} a_i = \vee_{i \geqslant m}\big((a_m \wedge a_i) \setminus a_{i+1}\big)$. Levando em conta que $(a_m \wedge a_i) \setminus a_{i+1} \leqslant a_i \setminus a_{i+1} \leqslant a_i + a_{i+1}$, chegamos a $a_m + \wedge_{i \geqslant m} a_i \leqslant \vee_{i \geqslant m}(a_i + a_{i+1})$.

Aplicando a identidade $c_m + \vee_{k \geqslant m} c_k = \vee_{i \geqslant m}(c_{i+1} \setminus c_i)$ para $c_k := \wedge_{i \geqslant k} a_i$ e levando em conta que $\vee_k(\wedge_{i \geqslant k} a_i) = \vee_{k \geqslant m}(\wedge_{i \geqslant k} a_i)$ e $c_{i+1} \setminus c_i \leqslant a_{i+1} \setminus a_i \leqslant a_i + a_{i+1}$, obtemos $\wedge_{i \geqslant m} a_i + \vee_k(\wedge_{i \geqslant k} a_i) \leqslant \vee_{i \geqslant m}(a_i + a_{i+1})$ $\blacksquare$

Denotamos $\underline{\lim}_i a_i := \vee_k(\wedge_{i \geqslant k} a_i)$.

5.4. Definição. Seja $A \subset \widetilde{A}$ uma subálgebra booleana da σ-álgebra $\widetilde{A}$ e seja $\mu : A \to [0, \infty]$ uma medida finito-aditiva. Para qualquer $a \in \widetilde{A}$, definimos $\mu^* a := \inf\limits_{a \leqslant \vee_i a_i} \sum_i \mu a_i$, onde $a_i \in A$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Denotamos $I := \{z \in \widetilde{A} \mid \mu^* z = 0\}$. Caso $z \in I$, dizemos que z *tem medida nula.*

5.5. Exercício. Note que $a_1 \leqslant a_2$ implica $\mu^* a_1 \leqslant \mu^* a_2$ para $a_1, a_2 \in \widetilde{A}$. Mostre que $\mu^*(a_1 \vee a_2) \leqslant \mu^* a_1 + \mu^* a_2$ e $\mu^*(a_1 + a_2) \leqslant \mu^* a_1 + \mu^* a_2$ para todos $a_1, a_2 \in \widetilde{A}$.

5.6. Exercício. Note que $a \wedge z, z \setminus a \in I$ e mostre que $\mu^*(a + z) = \mu^* a$ para quaisquer $a \in \widetilde{A}$ e $z \in I$. (Dica: $\mu^* a = \mu^*(a + z + z) \leqslant \mu^*(a + z) + \mu^* z = \mu^*(a + z) \leqslant \mu^* a + \mu^* z = \mu^* a$.) Deduza disto que $I \triangleleft \widetilde{A}$.

5.7. Exercício. Prove que a regra $\mathrm{d}(a_1, a_2) := \mathrm{d}(a_1 + I, a_2 + I) := \mu^*(a_1 + a_2)$ define uma métrica em $\widetilde{A}/I$ (com valores em $[0, \infty]$). Mostre que as operações $+$ e $\wedge$ são contínuas em $\widetilde{A}/I$.

Denotamos por $h : \widetilde{A} \to \widetilde{A}/I$ o homomorfismo do quociente e por $\bar{A}$ o fecho de hA em $\widetilde{A}/I$. Pelo exercício anterior, $\bar{A}$ é uma subálgebra booleana.

5.8. Exercício. Mostre que $\bar{A}$ e $\widetilde{A}/I$ são completos. (Dica: Sejam $a_i \in \widetilde{A}$, $i \in \mathbb{N}$, tais que os elementos ha_i, $i \in \mathbb{N}$, constituem uma sequência de Cauchy. Passando para uma subsequência, podemos supor que $\mathrm{d}(a_i, a_j) \leqslant 2^{-i}$ caso $i \leqslant j$. Pelo Corolário 5.3, $\mathrm{d}(a_m, \underline{\lim}_i a_i) \leqslant 2^{2-m}$.)

5.9. Exercício. Mostre que $\widetilde{A}/I$ é uma σ-álgebra e h é um homomorfismo de σ-álgebras. (Dica: Sejam $a_i \in \widetilde{A}$ e $z_i \in I$, $i \in \mathbb{N}$. Note que $\vee_i z_i \in I$ (tome $\varepsilon_i := 2^{-i}\varepsilon$ para z_i). Mostre que $\vee_i a_i + \vee_i(a_i + z_i) \in I$ (denotando $a := \vee_i(a_i \setminus z_i)$, $z := \vee_i(a_i \wedge z_i)$ e $z' := \vee_i(z_i \setminus a_i)$, temos $\vee_i a_i = a \vee z = a + z + a \wedge z$ e $\vee_i(a_i + z_i) = a \vee z' = a + z' + a \wedge z'$). Prove que h preserva supremos enumeráveis (o fato que $ha_i \leqslant hx$ para todo i significa que $a_i \wedge x = a_i + z_i$ para alguns $z_i \in I$; logo, $(\vee_i a_i) \wedge x = \vee_i(a_i + z_i) = z + \vee_i a_i$ para algum $z \in I$).)

5.10. Definição. Uma medida finito-aditiva $\mu : A \to [0, \infty]$ sobre uma subálgebra booleana $A \subset \widetilde{A}$ de uma σ-álgebra $\widetilde{A}$ é uma *medida σ-aditiva* se, para todos $a, a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $a \leqslant \vee_i a_i$, temos $\mu a \leqslant \sum_i \mu a_i$.

Tomando $a \wedge a_i$ no lugar de a_i, podemos reformular a condição da Definição 5.10: $\mu(\vee_i a_i) \leqslant \sum_i \mu a_i$ se $a_i, \vee_i a_i \in A$ para todo i. Equivalentemente, se $a_i, \sqcup_i a_i \in A$ para todo i, então $\mu(\sqcup_i a_i) = \sum_i \mu a_i$. Com efeito, $\mu(\sqcup_i a_i) \geqslant \mu(\sqcup_{i\in F} a_i) = \sum_{i\in F} \mu a_i$ para qualquer subconjunto finito $F \subset \mathbb{N}$, implicando a desigualdade $\mu(\sqcup_i a_i) \geqslant \sum_i \mu a_i$. A recíproca segue de $(a_1 \vee \dots \vee a_i) \setminus (a_1 \vee \dots \vee a_{i-1}) \leqslant a_i$. Concluímos também que uma medida finito-aditiva $\mu : A \to [0, \infty]$ é σ-aditiva se, para $a_i, \sqcup_i a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, temos $\mu(\sqcup_i a_i) \leqslant \sum_i \mu a_i$.

5.11. Lema. *A função volume $V_\Lambda : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ sobre a álgebra booleana $\mathcal{P}$ de polítopos em $\mathbb{R}^n$ é uma medida σ-aditiva, onde $\mathcal{P} \subset \widetilde{A} := 2^{\mathbb{R}^n}$.*

Demonstração. Sejam $P, P_i \in \mathcal{P}$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $P \subset \bigcup_i P_i$. Adicionando à família P_i, $i \in \mathbb{N}$, o polítopo $\overline{P} \setminus A$ (vide o Exercício 3.8), podemos supor que P é fechado, logo, compacto. Basta mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, temos $V_\Lambda P \leqslant \varepsilon + \sum_i V_\Lambda P_i$. Para cada i, podemos encontrar $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leqslant \overline{V}_{2^{-k_i}\Lambda} P_i - V_\Lambda P_i < 2^{-i}\varepsilon$. Como $\sum_i 2^{-i}\varepsilon = \varepsilon$, basta supor que os P_i's são cubos fechados coordenados. Substituindo P_i por um cubo aberto $P_i' \supset P_i$ tal que $0 < V_\Lambda P_i' - V_\Lambda P_i < 2^{-i}\varepsilon$, obtemos uma cobertura aberta do compacto $P \subset \bigcup_i P_i'$. Resta escolher uma subcobertura finita $P \subset P_1' \cup \dots \cup P_k'$ e concluir que $V_\Lambda P \leqslant \sum_{i=1}^k V_\Lambda P_i' \leqslant \varepsilon + \sum_i V_\Lambda P_i$ pela aditividade de V_Λ ■

5.12. Lema. *A σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ é gerada por $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Sendo fechado cada polítopo convexo, uma inclusão é óbvia. Cada conjunto aberto é uma união enumerável de cubos coordenados abertos cujos vértices têm coordenadas racionais. Cada cubo coordenado aberto é uma união enumerável de cubos coordenados fechados ■

5.13. Definição. Seja $\mu : A \to [0, \infty]$ uma medida finito-aditiva, onde $A \subset \widetilde{A}$ é uma subálgebra de uma σ-álgebra $\widetilde{A}$. Dizemos que μ é *σ-finita* se existem $a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\mu a_i < \infty$ para todo i e $\vee_i a_i = 1_{\widetilde{A}}$. Fazendo $b_1 := a_1$ e $b_i := (a_1 \vee \dots \vee a_i) \setminus (a_1 \vee \dots \vee a_{i-1})$ para $i > 1$ como acima, obtemos $b_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\mu b_i < \infty$ e $\sqcup_i b_i = 1_{\widetilde{A}}$.

É claro que a função volume $V_\Lambda : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ sobre a álgebra booleana $\mathcal{P}$ de polítopos em $\mathbb{R}^n$ é σ-finita.

5.14. Observação. *Sejam B_i, $i \in \mathbb{N}$, σ-álgebras. Então $\prod_{i\in\mathbb{N}} B_i$ é uma σ-álgebra gerada pelas subálgebras B_i's. Assim, faz sentido escrever $\prod_{i\in\mathbb{N}} B_i = \sqcup_i B_i$* ■

5.15. Proposição. *Seja $A \subset \widetilde{A}$ uma subálgebra booleana de uma σ-álgebra $\widetilde{A}$ e seja $\mu : A \to [0, \infty]$ uma medida σ-aditiva e σ-finita.*

Denotamos por $I \triangleleft \widetilde{A}$ o ideal de todos os elementos de $\widetilde{A}$ que têm medida nula, por $h : \widetilde{A} \to \widetilde{A}/I$, o homomorfismo do quociente, por d, a métrica em $\widetilde{A}/I$ introduzida no Exercício 5.7, por $\bar{A}$, o fecho de hA em $\widetilde{A}/I$ e por $\hat{A}$, a σ-subálgebra de $\widetilde{A}/I$ gerada por hA.

Então $\bar{A} \subset \hat{A}$ e $\bar{\mu} : \hat{A} \to [0, \infty]$, dada por $\bar{\mu}x := \mathrm{d}(0, x)$, é uma medida σ-aditiva e σ-finita.

Demonstração. Para $a, a' \in \widetilde{A}$, temos $\mathrm{d}(ha, ha') = \mu^*(a + a') = \mathrm{d}(0, ha + ha') = \bar{\mu}(ha + ha')$. Logo, $\mathrm{d}(x, y) = \bar{\mu}(x + y)$ para todos $x, y \in \widetilde{A}/I$.

Pela σ-aditividade de μ, temos $\mu^* a = \mu a$ para todo $a \in A$.

Se $ha_i \to a \in \bar{A}$ e $hb_i \to b \in \bar{A}$, onde $a_i, b_i \in A$, então $ha_i + hb_i \to a + b$, $ha_i \wedge hb_i \to a \wedge b$ (pelo Exercício 5.7) e $\mathrm{d}(ha_i, hb_i) \to \mathrm{d}(a, b)$. A igualdade $\mu a_i + \mu b_i = \mu(a_i + b_i) + 2\mu(a_i \wedge b_i)$ pode ser escrita como $\mathrm{d}(0, ha_i) + \mathrm{d}(0, hb_i) = \mathrm{d}(0, ha_i + hb_i) + 2\,\mathrm{d}(0, ha_i \wedge hb_i)$. Passando ao limite, obtemos $\mathrm{d}(0, a) + \mathrm{d}(0, b) = \mathrm{d}(0, a + b) + 2\,\mathrm{d}(0, a \wedge b)$, ou seja, $\bar{\mu}a + \bar{\mu}b = \bar{\mu}(a + b) + 2\bar{\mu}(a \wedge b)$. Logo, $\bar{\mu}$ é finito-aditiva sobre $\bar{A}$.

Pela solução do Exercício 5.8, $\bar{A} \subset \hat{A}$.

Seja $a_i \in \bar{A}$, $i \in \mathbb{N}$, uma família tal que a sequência $\bar{\mu}(\vee_{i=1}^n a_i)$, $n \in \mathbb{N}$, é limitada. Vamos mostrar que $\vee_i a_i \in \bar{A}$ e $\bar{\mu}(\vee_i a_i) \leqslant \sum_i \bar{\mu}a_i$. A sequência $c_n := \vee_{i=1}^n a_i$, $n \in \mathbb{N}$, é de Cauchy, pois $\mathrm{d}(c_m, c_n) = \bar{\mu}(c_m + c_n) = \bar{\mu}(c_n \setminus c_m) = \bar{\mu}c_n - \bar{\mu}c_m$ para $m \leqslant n$ e a sequência monótona $\bar{\mu}c_n$, $n \in \mathbb{N}$, possui limite. Pela completude de $\bar{A}$ (vide o Exercício 5.8), $c_n \to c \in \bar{A}$, portanto, $\mathrm{d}(0, c_n) \to \mathrm{d}(0, c)$, isto é, $\bar{\mu}c_n \to \bar{\mu}c$, implicando $\bar{\mu}c \leqslant \sum_i \bar{\mu}a_i$ em vista de $\bar{\mu}c_n \leqslant \sum_{i=1}^n \bar{\mu}a_i \leqslant \sum_i \bar{\mu}a_i$. Vamos mostrar que $c = \vee_i a_i$. Para $i \leqslant n$, temos $a_i \wedge c_n = a_i$. Passando ao limite por n, obtemos $a_i \wedge c = a_i$. Se $a_i \wedge x = a_i$ para todo i, então $c_n \wedge x = c_n$ para todo n. Fazendo o limite, chegamos a $c \wedge x = c$, como desejado.

Sendo σ-finita a medida μ, existem $b_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\sqcup_i b_i = 1_{\widetilde{A}}$ e $\mu b_i < \infty$ para todo i. Pelo fato que acabamos de demonstrar, $hb_i \wedge \bar{A}$ é uma σ-subálgebra sobre a qual $\bar{\mu}$ é limitada e σ-aditiva. Pela Observação 5.14, $\sqcup_i hb_i = 1$ implica $\hat{A} = \sqcup_i (hb_i \wedge \bar{A})$. De $\bar{\mu}hb_i = \mu b_i < \infty$ segue a σ-finitude de $\bar{\mu}$ sobre $\hat{A}$.

Seja $a_i \in \bar{A}$, $i \in \mathbb{N}$, uma família tal que a sequência $\bar{\mu}(\vee_{i=1}^n a_i)$, $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada. Como $\bar{\mu}(\vee_{i=1}^n a_i) \leqslant \sum_{i=1}^n \bar{\mu}a_i$ e, pelo Exercício 5.5, $\bar{\mu}(\vee_{i=1}^n a_i) \leqslant \bar{\mu}(\vee_i a_i)$ para todo n, obtemos $\bar{\mu}(\vee_i a_i) = \sum_i \bar{\mu}a_i = \infty$. Disto deduzimos a σ-aditividade de $\bar{\mu}$ sobre $\hat{A}$ ■

5.16. Definição. Sejam $A \subset \widetilde{A}$, $\mu : A \to [0, \infty]$ e I como na Proposição 5.15. Denotamos por B e por L as σ-subálgebras de $\widetilde{A}$ geradas respectivamente por A e por A, I. Denominamos L a *σ-álgebra de Lebesgue* (de elementos *mensuráveis*).

5.17. Exercício (teorema de Lebesgue)**.** Mostre que $L = B + I = h^{-1}\hat{A}$ e que $\bar{\mu}$ induz sobre L uma medida σ-aditiva e σ-finita que estende μ.

5.18. Exercício (conjunto de Vitali)**.** Sendo $[0, 1] + \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, podemos encontrar um subconjunto $V \subset [0, 1]$ tal que o homomorfismo do quociente providencia uma bijeção $V \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Enumeramos o conjunto $\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{q_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e denotamos $V_i := V + q_i$. Mostre que $[0, 1] \subset \bigsqcup_i V_i \subset [-1, 2]$. Se V fosse mensurável, qual seria sua medida?

Medida e integral são conceitos bastante próximos. A medida de um conjunto é a integral da sua função característica. Reciprocamente, se em um espaço é dada uma medida, podemos falar em integral de função. No que se segue, explicaremos como realizar tal recíproca.

Para obter a álgebra de conjuntos mensuráveis, toma-se a álgebra de polítopos e encontra-se seu completamento pela métrica relacionada com a medida. De modo análogo, pode-se construir o espaço de funções mensuráveis tomando-se o limite de funções escada pela métrica induzida da integral. Tal métrica se chama L^1-métrica.

5.19. Definição. Um *espaço de Borel* é um conjunto M munido de uma σ-álgebra de subconjuntos B. Sejam (M_1, B_1) e (M_2, B_2) espaços de Borel. Dizemos que uma função $f : M_1 \to M_2$ é *mensurável* se $f^{-1}b_2 \in B_1$ para todo $b_2 \in B_2$. Por exemplo, se M_i é um espaço topológico e B_i denota sua σ-álgebra de Borel, qualquer função contínua $f : M_1 \to M_2$ é mensurável. Para um espaço de Borel M, denotamos $\mathrm{L}\,M := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável}\}$; aqui, a σ-álgebra de $\mathbb{R}$ é a de Borel.

5.20. Exercício. Seja (M, B) um espaço de Borel. Prove que $M \to \mathbb{R}$ é mensurável se e só se a imagem inversa de qualquer intervalo fechado está em B ou, equivalentemente, se e só se a imagem inversa de qualquer intervalo semi-infinito $(-\infty, r)$, $r \in \mathbb{R}$, está em B. Mostre que $\mathrm{L}\,M$ é um espaço $\mathbb{R}$-linear e que $|f| \in \mathrm{L}\,M$ para qualquer $f \in \mathrm{L}\,M$. (Dica: note que $\big\{x \in M \mid f_1(x) + f_2(x) < r\big\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \big\{x \in M \mid f_1(x) < q \text{ e } f_2(x) < r - q\big\}$ para quaisquer $f_1, f_2 \in \mathrm{L}\,M$ e $r \in \mathbb{R}$.) Mostre que $\mathrm{L}\,M$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra. (Dica: para mostrar que $f_1, f_2 \in \mathrm{L}\,M$ implica $f_1 \cdot f_2 \in \mathrm{L}\,M$, reduza o problema ao caso $f_1, f_2 \geqslant 0$ e aproveite a dica anterior.)

5.21. Exercício. Denotamos por B e L as σ-álgebras de Borel e de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Sejam $f_1, f_2 : (\mathbb{R}, L) \to (\mathbb{R}, B)$ funções mensuráveis. Será que $f_2 \circ f_1$ é necessariamente uma função mensurável?

5.22. Definição. Se (M, B) é um espaço de Borel munido de uma medida μ sobre B que é σ-aditiva e σ-finita, dizemos que M é um *espaço com medida*. Denotamos $\mathrm{L}^{\geqslant 0}\,M := \{f : M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0} \mid f \in \mathrm{L}\,M\}$. Uma função $\int_\mu : \mathrm{L}^{\geqslant 0}\,M \to [0, \infty]$ se chama *integral* se

l. $\int_\mu (f_1 + f_2) = \int_\mu f_1 + \int_\mu f_2$ e $\int_\mu (rf) = r \int_\mu f$,
m. $\int_\mu \chi_b = \mu b$,
a. $\int_\mu (\sum_i g_i) = \sum_i \int_\mu g_i$,
z. $\int_\mu f = 0$ se e só se $\mu\{x \in M \mid fx \neq 0\} = 0$

para quaisquer $f, f_1, f_2, g_i \in \mathrm{L}^{\geqslant 0}\,M$, $i \in \mathbb{N}$, $b \in B$ e $\mathbb{R} \ni r \geqslant 0$ tais que $\sum_i g_i \in \mathrm{L}^{\geqslant 0}\,M$.

Nessas circunstâncias, definimos o conjunto de *funções integráveis* $\mathrm{I}\,M := \big\{f \in \mathrm{L}\,M \mid \int_\mu |f| < \infty\big\}$ e

$$\int_\mu f := \frac{1}{2}\Big(\int_\mu \big(|f| + f\big) - \int_\mu \big(|f| - f\big)\Big) \tag{5.23}$$

para todo $f \in \mathrm{I}\,M$. Esta mesma fórmula define a integral de qualquer $f \in \mathrm{L}\,M$ exceto no caso quando ocorre $\infty - \infty$.

5.24. Exercício. Mostre que $\mathrm{I}\,M$ é um subespaço $\mathbb{R}$-linear em $\mathrm{L}\,M$, que a definição (5.23) é correta e que $\int_\mu$ é $\mathbb{R}$-linear sobre $\mathrm{I}\,M$.

5.25. Definição. Seja (M, B) um espaço de Borel. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é uma *função escada* se fM é enumerável e $f^{-1}r \in B$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathrm{E}\,M$ o conjunto de todas as funções escada e, por $\mathrm{E}^{\geqslant 0}\,M$, o conjunto de todas as funções escada não-negativas. Dados um espaço M com medida μ e $f \in \mathrm{E}^{\geqslant 0}\,M$, definimos $\int_\mu f := \sum_{r\in fM} r \cdot \mu(f^{-1}r)$; aqui, $0 \cdot \mu(f^{-1}0) := 0$, mesmo se $\mu(f^{-1}0) = \infty$. Para $f \in \mathrm{E}\,M$, definimos $||f||_{\mathrm{L}^1} := \int_\mu |f|$.

5.26. Observação. *Para qualquer função escada $f \in \mathrm{E}\,M$ com $\int_\mu |f| < \infty$, a integral $\int_\mu f$ é bem definida por* (5.23) *e, além disso, se calcula pela fórmula $\int_\mu f = \sum_{r\in fM} r \cdot \mu(f^{-1}r)$. Daí segue $|\int_\mu f| \leqslant \int_\mu |f|$* ∎

5.27. Exercício. Verifique que $\mathrm{E}\,M$ é um subespaço $\mathbb{R}$-linear em $\mathrm{L}\,M$, que $|f| \in \mathrm{E}\,M$ se $f \in \mathrm{E}\,M$ e que a integral introduzida na Definição 5.25 para funções de $\mathrm{E}^{\geqslant 0}\,M$ satisfaz as propriedades **l**, **m**, **a**, **z**. (Dica: Note que a definição acima de $\int_\mu f$ para $f \in \mathrm{E}^{\geqslant 0}\,M$ é a única possível que satisfaz as mencionadas propriedades, pois $f = \sum_i r_i \cdot \chi_{b_i}$, onde $b_i \in B$, $0 \leqslant r_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\bigsqcup_i b_i = M$. Para mostrar **a**, note que podemos omitir a exigência $\bigsqcup_i b_i = M$ na fórmula anterior supondo que os valores de f são finitos e que $\int_\mu \sum_i r_i \cdot \chi_{b_i} = \sum_i r_i \cdot \mu b_i$.) Mostre que $||\cdot||_{\mathrm{L}^1} : \mathrm{E}\,M \to [0, \infty]$ satisfaz a desigualdade triangular.

5.28. Exercício. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função. Note que a sequência de funções $f_n : x \mapsto [2^n fx]2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente a f, onde $[r]$ denota a parte inteira de $r \in \mathbb{R}$. (É fácil ver que

$f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \dots$) Conclua que qualquer $f \in \mathrm{L}\, M$ é o limite uniforme de uma sequência de funções escada. Mostre também a recíproca: se uma função f é o limite uniforme de uma sequência $f_i \in \mathrm{E}\, M$, $i \in \mathbb{N}$, então f é mensurável. (Dica: $f^{-1}(-\infty, r) = \bigcup\limits_{\sup|f-f_i|<\frac{1}{n}} f_i^{-1}(-\infty, r-\frac{1}{n})$.)

A ideia da demonstração da Proposição 5.29 é a mesma como a da definição da medida de conjuntos mensuráveis a partir de uma medida σ-aditiva na álgebra de polítopos. Podemos construir conjuntos mensuráveis como limites de polítopos e, as funções mensuráveis, como limites de funções escada. A integral se calcula com ajuda da passagem ao limite exatamente como fazemos com a medida.

5.29. Proposição. *Seja (M, B, μ) um espaço com medida. Então a integral existe e é única.*

Demonstração. A unicidade da integral para funções escada foi observada no Exercício 5.27. Pelo Exercício 5.28, qualquer função $f \in \mathrm{L}^{\geqslant 0} M$ é o limite uniforme de uma sequência $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \dots$ de funções de $\mathrm{E}^{\geqslant 0} M$. Por **l** e **a**, $\int_\mu f = \lim_n \int_\mu f_n$. Assim obtemos a unicidade da integral.

Fixamos $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\sqcup_i b_i = M$ e $\mu b_i < \infty$ para todo i.

Seja $f \in \mathrm{L}^{\geqslant 0} M$. Para qualquer $i \in \mathbb{N}$, definimos a integral $\int_\mu f \cdot \chi_{b_i} := \lim_m \int_\mu f_{im}$, onde $f_{im} \in \mathrm{E}^{\geqslant 0} M$ e $f_{im} \cdot \chi_{b_i} = f_{im}$ (isto é, f_{im} é nula fora de b_i) e a sequência f_{im}, $m \in \mathbb{N}$, converge uniformemente a $f \cdot \chi_{b_i}$ para todo i. Tais funções f_{im} existem pelo Exercício 5.28 aplicado aos b_i's. O limite $\lim_m \int_\mu f_{im}$ existe pela Observação 5.26, pois $|\int_\mu f_{im} - \int_\mu f_{in}| \leqslant \int_\mu |f_{im} - f_{in}| \leqslant \sup|f_{im} - f_{in}| \cdot \mu b_i$ e a sequência f_{im}, $m \in \mathbb{N}$, é de Cauchy no sentido da norma $\sup|\cdot|$. A definição de $\int_\mu f \cdot \chi_{b_i}$ independe da escolha das funções f_{im}'s: para outras funções g_{im}, temos $|\int_\mu f_{im} - \int_\mu g_{im}| \leqslant \int_\mu |f_{im} - g_{im}| \leqslant \sup|f_{im} - g_{im}| \cdot \mu b_i$ com $\lim_m \sup|f_{im} - g_{im}| = 0$ para todo i. Finalmente, definimos $\int_\mu f := \sum_i \int_\mu f \cdot \chi_{b_i}$.

A propriedade **l** da integral que acabamos de introduzir vale, pois é válida para funções de $\mathrm{E}^{\geqslant 0} M$ pelo Exercício 5.27. A propriedade **m** é uma consequência imediata da σ-aditividade de μ.

Para verificar **a**, podemos supor que $M = b_i$. Observamos que a desigualdade $\int_\mu \sum_i g_i \geqslant \sum_i \int_\mu g_i$ segue da propriedade **l** já demonstrada. Mostraremos que $\int_\mu \sum_i g_i \leqslant \sum_i \int_\mu g_i$. Para $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ e $\mathrm{E}^{\geqslant 0} M \ni f \leqslant \sum_i g_i$, denotamos $l_{m,\varepsilon,f} := \{x \in M \mid \varepsilon f x \leqslant \sum_{i=1}^m g_i x\}$. É claro que $\bigcup_m l_{m,\varepsilon,f} = M$. Portanto, a sequência não-decrescente $f \cdot \chi_{l_{m,\varepsilon,f}} \in \mathrm{E}^{\geqslant 0} M$, $m \in \mathbb{N}$, converge a $f \in \mathrm{E}^{\geqslant 0} M$. Sendo a propriedade **a** válida para funções de $\mathrm{E}^{\geqslant 0} M$, obtemos $\lim_m \int_\mu f \cdot \chi_{l_{m,\varepsilon,f}} = \int_\mu f$. Por outro lado, pela propriedade **l** já conhecida, $\varepsilon \int_\mu f \cdot \chi_{l_{m,\varepsilon,f}} \leqslant \int_\mu \sum_{i=1}^m g_i \cdot \chi_{l_{m,\varepsilon,f}} \leqslant \int_\mu \sum_{i=1}^m g_i = \sum_{i=1}^m \int_\mu g_i$. Passando ao limite por m, obtemos $\varepsilon \int_\mu f \leqslant \sum_i \int_\mu g_i$ para qualquer $\varepsilon \in (0,1)$. Consequentemente, $\int_\mu f \leqslant \sum_i \int_\mu g_i$ se $\mathrm{E}^{\geqslant 0} M \ni f \leqslant \sum_i g_i$. Pela definição da integral, podemos escolher f de modo que a diferença entre $\int_\mu f$ e $\int_\mu \sum_i g_i$ seja arbitrariamente pequena.

É fácil reduzir a verificação de **z** para o caso de $M = b_i$. Agora, seja $f_m \in \mathrm{E}^{\geqslant 0} M$, $m \in \mathbb{N}$, uma sequência que converge uniformemente a $f \in \mathrm{L}^{\geqslant 0} M$. Para $\varepsilon > 0$, façamos $b_\varepsilon := \{x \in M \mid fx \geqslant 2\varepsilon\} \in B$. Note que $\sup|f - f_m| \leqslant \varepsilon$ implica $f_m x \geqslant \varepsilon$ para todo $x \in b_\varepsilon$ e, portanto, $\int_\mu f_m \geqslant \int_\mu f_m \cdot \chi_{b_\varepsilon} \geqslant \varepsilon \cdot \mu b_\varepsilon$. Se $\int_\mu f = 0$, isto é, se $\lim_m \int_\mu f_m = 0$, então $\mu b_\varepsilon = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Assim, $\int_\mu f = 0$ implica $\mu(\bigcup_n b_{\frac{1}{n}}) = 0$. Mas $\bigcup_n b_{\frac{1}{n}} = \{x \in M \mid fx \neq 0\}$, pois $f \in \mathrm{L}^{\geqslant 0} M$. Reciprocamente, suponha que $\mu z = 0$, onde $z := \{x \in M \mid fx \neq 0\}$. Trocando f por $f \cdot (1 - \chi_z)$ e f_m por $f_m \cdot (1 - \chi_z)$, não alteramos $\int_\mu f_m$, pois **z** vale para funções de $\mathrm{E}^{\geqslant 0} M$ pelo Exercício 5.27. Deste modo, podemos supor que $f = 0$ e já sabemos que $\lim_m \int_\mu f_m$ independe da escolha das f_m's, obtendo o desejado ■

5.30. Observação. *Seja $f \in \mathrm{I}\, M$. Se, para todo i, a função $f \cdot \chi_{b_i}$ é o limite uniforme da sequência $f_{im} \in \mathrm{E}\, M$, $m \in \mathbb{N}$, onde $f_{im} \cdot \chi_{b_i} = f_{im}$, $\sqcup_i b_i = M$ e $\mu b_i < \infty$ para todos i e m, então $\int_\mu f = \sum_i \lim_m \int_\mu f_{im}$.*

Demonstração. A afirmação é uma consequência fácil da fórmula (5.23) e da definição de integral dada na demonstração da Proposição 5.29 ■

5.31. Exercício. Sejam $f, g \in \mathrm{L}\, M$ tais que $|f| \leqslant g$ e $\int_\mu g < \infty$. Mostre que f é integrável e $\int_\mu f \leqslant \int_\mu g$.

5.32. Exercício. Seja (M, B, μ) um espaço com medida, seja $M' \in B$ um subespaço e seja $f \in \mathrm{L}\, M$. Mostre que $f|_{M'} \in \mathrm{L}\, M'$ e que $f|_{M'}$ é integrável sobre M' caso f seja integrável.

5.33. Exercício. Seja $f : M \to \mathbb{R}$. Mostre que f é integrável se e só se $|f|$ é integrável.

5.34. Exercício. Seja $f \in \mathrm{L}^{\geqslant 0} M$ e seja $f_m \in \mathrm{E}^{\geqslant 0} M$, $m \in \mathbb{N}$, uma sequência que converge uniformemente a f. Será que podemos definir a integral como $\int_\mu f := \lim_m \int_\mu f_m$?

Seja E um espaço topológico. O espaço de todas as funções de um conjunto J com valores em E com a topologia da convergência pontual é o produto de J cópias de E com a topologia do produto que, nesta situação, se chama topologia de Tychonoff. O teorema de Tychonoff afirma que, para qualquer compacto E, o produto de qualquer quantidade de cópias de E com si mesmo é compacto. Este teorema usa essencialmente a teoria dos conjuntos e, em particular, o axioma da escolha. Tychonoff demonstrou seu teorema aos 22 anos de idade, mas os colegas mais velhos não poderiam acreditar que o fato provado era verdadeiro e não permitiram a publicação do teorema durante quase dez anos.

No final da seção, provaremos que o espaço $\mathrm{L}^1 M$ é completo. Heuristicamente falando, isto deve ser consequência do teorema de Tychonoff: o espaço de funções limitadas na topologia da convergência pontual é compacto e da convergência pontual segue a convergência na métrica L^1. Nessa abordagem há dois momentos negativos: primeiramente, o teorema de Tychonoff é muito não-construtivo; em segundo lugar, precisamos considerar funções limitadas. A demonstração tradicional é um pouco mais longa, mas não possui estes defeitos.

A integral de Lebesgue possui muitas propriedades bacanas. Por exemplo, ela comuta com a convergência pontual de funções (diferentemente da integral de Riemann, que comuta apenas com a convergência uniforme).[7]

5.35. Exercício. Seja $f_i : M \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções mensuráveis tal que o limite $fx := \limsup_i f_i x$ (ou $fx := \liminf_i f_i x$) é finito para todo $x \in M$. Mostre que f é uma função mensurável. (Dica: Sendo $\limsup_i f_i x = \lim_m g_m x$, onde $g_m x := \sup_{i \geqslant m} f_i x$, reduza a questão ao caso da sequência monótona $g_1 \geqslant g_2 \geqslant \dots \geqslant g_m \geqslant \dots$ e use a fórmula $f^{-1}(-\infty, r) = \bigcup_i g_i^{-1}(-\infty, r)$. Por sua vez, para provar que g_m é mensurável, note que $g_m x = \lim_{n \geqslant m} h_n x$, onde $h_n x := \sup_{i=m}^n f_i x$, e aplique a fórmula $g_m^{-1}(r, \infty) = \bigcup_{i \geqslant m} h_i^{-1}(r, \infty)$ para a sequência monótona $h_m \leqslant h_{m+1} \leqslant \dots \leqslant h_n \leqslant \dots$ Finalmente, para ver que h_n é mensurável, note que $2 \max(h, 0) = |h| + h$.) Simultaneamente, mostramos que a função $x \mapsto \sup_i f_i x$ (ou $x \mapsto \inf_i f_i x$) é mensurável caso finita.

5.36. Exercício (lema de Fatou)**.** Seja $f_i \in \mathrm{L}^{\geqslant 0} M$, $i \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções tal que o limite $\liminf_i f_i x$ é finito para todo $x \in M$. Mostre que $\int_\mu \liminf_i f_i \leqslant \liminf_i \int_\mu f_i$. (Dica: já que $n \leqslant j$ implica $\inf_{i \geqslant n} f_i x \leqslant f_j x$ para todo $x \in M$, temos $\int_\mu \inf_{i \geqslant n} f_i \leqslant \int_\mu f_j$; pela propriedade **a**, $\lim_n \int_\mu \inf_{i \geqslant n} f_i = \int_\mu \lim_n \inf_{i \geqslant n} f_i = \int_\mu \liminf_i f_i$.)

5.37. Exercício. Seja $f_i \in \mathrm{L}\, M$, $i \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções tal que o limite $fx := \lim_i f_i x$ existe e é finito para todo $x \in M$. Suponha que existe uma função $g \in \mathrm{L}^{\geqslant 0} M$ tal que $\int_\mu g < \infty$ e $|f_i| \leqslant g$ para todo i. Mostre que $\int_\mu f < \infty$ e $\int_\mu f = \lim_i \int_\mu f_i$. (Dica: aplique o exercício anterior para $g + f_i$ e para $g - f_i$.)

[7] Curiosamente, Cauchy, quem foi o primeiro a pensar sobre convergência de funções, não viu a diferença entre convergência pontual e uniforme e, entre outras coisas, achava que o limite pontual de funções contínuas é contínua (encontre um contra-exemplo). Talvez o primeiro que conscientizou a não-trivialidade deste conceito foi Dirichlet, mas as formulações rigorosas das definições e teoremas necessários pertencem a Weierstrass.

5.38. Exercício. Construa contra-exemplos para a afirmação do exercício anterior sem a hipótese $\int_\mu g < \infty$ nos seguintes casos: 1. g é uma constante; 2. $\mu M < \infty$.

5.39. Definição. Seja (M, B, μ) um espaço com medida. Dizemos que as funções $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ são *iguais quase sempre* (*q.s.*) se $\{x \in M \mid f_1 x \neq f_2 x\} \in B$ e $\mu\{x \in M \mid f_1 x \neq f_2 x\} = 0$. Todas as funções que são quase sempre nulas formam um subespaço $\mathbb{R}$-linear $N \subset \mathrm{L}\, M$. Pela propriedade $\mathbf{z}$ da integral, $N \subset \mathrm{I}\, M$. O espaço $\mathrm{L}^1 M := \mathrm{I}\, M/N$ é munido da *norma* (e *métrica*) $||\cdot||_{\mathrm{L}^1}$, dada por $||f||_{\mathrm{L}^1} := \int_\mu |f|$.

5.40. Exercício. Sejam $f_1, f_2 \in \mathrm{I}\, M$. Mostre que[8] $||f_1 + f_2||_{\mathrm{L}^1} \leqslant ||f_1||_{\mathrm{L}^1} + ||f_2||_{\mathrm{L}^1}$.

5.41. Exercício. Mostre que a integral é um funcional contínuo no espaço $\mathrm{L}^1 M$.

5.42. Definição. Uma sequência de funções $f_i : M \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, *converge quase sempre* (*q.s.*) a uma função $f : M \to \mathbb{R}$ se existe $z \in B$ tal que $\mu z = 0$ e $\lim_i f_i x = f x$ para todo $x \in M \setminus z$.

Observamos várias vezes o seguinte fenômeno agradável ao lidar com funções mensuráveis: os conjuntos que encontramos no dia a dia são tipicamente mensuráveis. Mais uma vez:

5.43. Exercício. Seja (M, B) um espaço de Borel e sejam $f, f_i : M \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, funções tais que $f_i - f \in \mathrm{L}\, M$ para todo i. Mostre que pertence a B o conjunto l de pontos x tais que $f_i x \to f x$. (Dica: $l = \bigcap_n \bigcup_k \bigcap_{i \geqslant k} l_{i,n}$, onde $l_{i,n} := \big\{x \in M \mid |f_i x - f x| < \frac{1}{n}\big\}$.)

5.44. Exercício. Sejam $f_i, g_i \in \mathrm{L}\, M$, $i \in \mathbb{N}$, sequências de funções mensuráveis que são de Cauchy no sentido da norma $||\cdot||_{\mathrm{L}^1}$ e que convergem uniformemente às funções f e g. Dizemos que as sequências são *equivalentes* se $\lim_i \int_\mu |f_i - g_i| = 0$. Neste caso, mostre que $f, g \in \mathrm{I}\, M$, que $\int_\mu f = \lim_i \int_\mu f_i$ e que f é igual quase sempre a g. (Dica: O fato que $f, g \in \mathrm{L}\, M$ segue, por exemplo, do Exercício 5.35. A desigualdade $\big|\int_\mu f_i - \int_\mu f_j\big| \leqslant \int_\mu |f_i - f_j|$ implica que a sequência $\int_\mu f_i$, $i \in \mathbb{N}$, converge e, a desigualdade $\big|\int_\mu f_i - \int_\mu g_i\big| \leqslant \int_\mu |f_i - g_i|$, que $\lim_i \int_\mu f_i = \lim_i \int_\mu g_i$. Pelo Exercício 5.37, $f \in \mathrm{I}\, M$ e $\int_\mu f = \lim_i \int_\mu f_i$. Tomando $f_i - g_i$ no lugar de f_i e $f - g$ no lugar de f, podemos supor que $\int_\mu |f_i| \to 0$. Seja $a_n := \big\{x \in M \mid |f x| > \frac{2}{n}\big\}$. Para algum $k \in \mathbb{N}$, temos $|f_i x| > \frac{1}{n}$ se $i \geqslant k$ e $x \in a_n$. Isto implica que $\mu a_n = 0$ para todo n. Logo, $\mu(\bigcup_n a_n) = 0$.) Observe que a abordagem apresentada providencia uma definição alternativa de integral a partir da integração de funções escada.

5.45. Exercício (completude de L^1)**.** Mostre que qualquer sequência de Cauchy em relação à métrica $||\cdot||_{\mathrm{L}^1}$ possui uma subsequência que converge quase sempre. (Dica: Escolhendo uma subsequência, suponha que $||f_i - f_{i+1}||_{\mathrm{L}^1} \leqslant 2^{-2i}$ para todo i. Daí, $\mu a_i \leqslant 2^{-i}$, $\mu c_k \leqslant 2^{1-k}$ e $\mu z = 0$ para todos i e k, onde $a_i := \big\{x \in M \mid |f_i x - f_{i+1} x| \geqslant 2^{-i}\big\}$, $c_k := \bigcup_{i \geqslant k} a_i$ e $z := \bigcap_k c_k$. Se $x \notin c_k$ e $k \leqslant m < n$, então $|f_m x - f_n x| \leqslant \sum_{i=m}^{n-1} |f_i x - f_{i+1} x| < \sum_{i=m}^{n-1} 2^{-i} < 2^{1-m}$, implicando que a sequência $f_i x$, $i \in \mathbb{N}$, converge para todo $x \notin z$.) Conclua que o espaço $\mathrm{L}^1 M$ é completo. (Dica: note que a sequência f_i, $i \in \mathbb{N}$, converge uniformemente sobre $M \setminus z$ à função f (pelo Exercício 5.35, $f \in \mathrm{L}\, M$) e aplique o Exercício 5.44, onde $f x := \lim_i f_i x$ para $x \notin z$ e $f x := 0$ para $x \in z$.)

5E. Exercícios

1. Calcule $\widetilde{A}/I$ para a medida de Dirac (a medida de Dirac é dada pela regra: $\mu a = 0$ se $p \notin a$ e $\mu a = 1$ se $p \in a$).

2. Construa um exemplo mostrando que μ^* pode não ser finito-aditiva.

3.* Construa um subconjunto não-enumerável de medida nula no intervalo $[0, 1]$.

4. Seja $d : [0, 1] \to [0, 1]$ um difeomorfismo. Mostre que d manda subconjuntos de medida nula para subconjuntos de medida nula.

---

[8]Da mesma maneira, podemos munir o espaço $\mathrm{L}\, M/N$ das norma e métrica L^1; essas assumem valores em $[0, \infty]$ e também satisfazem a desigualdade triangular.

5. Seja $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função injetora de classe C^∞. Mostre que d manda subconjuntos de medida nula para subconjuntos de medida nula.

6.* Construa uma medida $\mu : A \to [0,\infty]$ finito-aditiva que não é σ-aditiva. Mostre que uma medida finito-aditiva μ é σ-aditiva se e só se $\mu^* a = \mu a$ para todo $a \in A$.

7.* Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, isto é, $C \subset B$, onde B é uma bola aberta. Mostre que C é mensurável se e só se $\mu^* C + \mu^*(B \setminus C) = \mu^* B$.

8.* Sejam (M_1, B_1, μ_1) e (M_2, B_2, μ_2) espaços com medidas finito-aditivas. Consideremos a álgebra booleana de subconjuntos $A \subset 2^{M_1 \times M_2}$ gerada por $\{b_1 \times b_2 \mid b_1 \in B_1 \text{ e } b_2 \in B_2\}$ e definamos $\mu(b_1 \times b_2) := \mu_1 b_1 \cdot \mu_2 b_2$ (aqui, $0 \cdot \infty := 0$). Note que existe uma única medida finito-aditiva sobre A que estende μ. Supondo que μ_1 e μ_2 são σ-aditivas e σ-finitas, mostre que esta extensão é σ-aditiva e σ-finita. Aplique o teorema de Lebesgue e desfrute o resultado.

Os Exercícios 9–13 contêm, num certo sentido, o máximo possível na direção de se construir uma medida σ-aditiva a partir de uma dada medida finito-aditiva.

9. Seja $\mu : A \to [0,\infty]$ uma medida finito-aditiva sobre uma álgebra booleana A e seja $\hat{A}_\mu$ o completamento de A/I_μ em relação à métrica dada por $\mathrm{d}(a_1, a_2) := \mu(a_1 + a_2)$, onde $I_\mu := \{z \in A \mid \mu z = 0\}$. Mostre que $\hat{A}_\mu$ é uma álgebra booleana com operações $+$ e $\wedge$ contínuas e que a função $\hat{\mu} : \hat{A}_\mu \to [0,\infty]$ dada por $\hat{\mu} a := \mathrm{d}(0, a)$ para $a \in \hat{A}_\mu$ é finito-aditiva. Em particular, $\hat{\mu}$ é contínua.

10. Nas condições do Exercício 9, seja $a_i \in \hat{A}_\mu$, $i \in \mathbb{N}$, uma família com a sequência $\mu(\vee_{i=1}^n a_i)$, $n \in \mathbb{N}$, limitada. Mostre que a sequência $b_n := \vee_{i=1}^n a_i$, $n \in \mathbb{N}$, é de Cauchy.

11. Denotando por $b \in \hat{A}_\mu$ o limite da sequência b_n, $n \in \mathbb{N}$, nas condições do Exercício 10, mostre que $b = \vee_i a_i$ e que $\hat{\mu}(\vee_i a_i) \leqslant \sum_i \hat{\mu} a_i$.

12. Nas condições do Exercício 9, seja $a_i \in \hat{A}_\mu$, $i \in \mathbb{N}$, uma família com a sequência $\mu(\vee_{i=1}^n a_i)$, $n \in \mathbb{N}$, ilimitada mas, entretanto, com supremo $\vee_i a_i$. Mostre que $\hat{\mu}(\vee_i a_i) \leqslant \sum_i \hat{\mu} a_i$.

13.* Nas condições do Exercício 9, mostre que existe uma única medida finito-aditiva sobre $\hat{A}_\mu$ que satisfaz as conclusões dos Exercícios 11 e 12. Em particular, conclua que $(\hat{A}_\mu, \hat{\mu})$ é uma σ-álgebra com medida σ-aditiva e limitada caso μ seja limitada.

14. Seja M um espaço de Borel e sejam $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ funções. Mostre que f_1, f_2 são mensuráveis se e só se a função $(f_1, f_2) : M \to \mathbb{R}^2$ é mensurável com relação a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^2$. Encontre uma demonstração alternativa do fato que $\mathrm{L}\, M$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra (vide o Exercício 5.20).

15.* Considere o anel dos números inteiros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ munido da σ-álgebra de subconjuntos aberto-fechados. Mostre que qualquer função contínua sobre $\mathbb{Z}_p$ é mensurável.

16. Suponha que a imagem fM é enumerável para uma dada função $f : M \to \mathbb{R}$. Mostre que $f \in \mathrm{E}\, M$ se e só se $f \in \mathrm{L}\, M$.

17.* Construa um exemplo de função não-mensurável $f : M \to \mathbb{R}$ com fM enumerável.

18.* Sejam (M, B) um espaço de Borel e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f^{-1} r \in B$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Podemos concluir que $f \in \mathrm{L}\, M$?

19. Mostre que o limite uniforme de qualquer sequência de funções mensuráveis é uma função mensurável.

20. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável com suporte compacto. Mostre que $[nf] n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de funções escada e que ela é de Cauchy em relação à métrica L^1.

21. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável com suporte contido num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ e seja f_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções escada com suporte contido em K que converge uniformemente a f. Mostre que a sequência é de Cauchy em relação à métrica L^1.

22. Dada uma sequência $f_i \in \mathrm{L}\,\mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, que converge uniformemente, será que ela é de Cauchy em relação à métrica L^1 ?

23. Dada uma sequência $f_i \in \mathrm{L}\,\mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, que converge em relação à metrica L^1, será que ela é de Cauchy no sentido da métrica $\sup|\cdot|$?

24.* Sejam (M, B, μ) um espaço com medida e $f \in \mathrm{L}\,M$. Mostre que existe uma sequência $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots \leqslant f_n \leqslant \dots$ de funções escada que converge uniformemente a f e é de Cauchy em relação à métrica L^1. (Dica: sejam $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\sqcup_i b_i = M$ e $\mu b_i < \infty$ para todo i; faça $m_i := \max(1, \mu b_i)$ e $f_n x := \sum_i \frac{[2^{n+i} m_i f x]}{2^{n+i} m_i} \chi_{b_i}\cdot$.)

25. Seja (M, L, μ) um espaço com medida completa (isto significa que todos subconjuntos de M que são Lebesgue mensuráveis estão em L) e seja $f_i \in \mathrm{L}\,M$, $i \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções mensuráveis que converge quase sempre a uma função $f : M \to \mathbb{R}$. Mostre que $f \in L$.

26 (teorema de Egoroff)**.*** Seja (M, B, μ) um espaço com medida limitada, $\mu M < \infty$. Suponha que uma sequência $f_i \in \mathrm{L}\,M$, $i \in \mathbb{N}$, converge quase sempre a uma função $f : M \to \mathbb{R}$. Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $b_\varepsilon \in B$ tal que $\mu b_\varepsilon \leqslant \varepsilon$ e a sequência f_i, $i \in \mathbb{N}$, converge uniformemente a f sobre $M \setminus b_\varepsilon$. (Dica: retire a palavra "quase"; note que $\bigcup_k a_{k,n} = M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a_{k,n} := \bigcap_{i \geqslant k} \{x \in M \mid |f_i x| \leqslant \frac{1}{n}\}$; escolha indutivamente os $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\mu(\bigcap_{j=1}^n a_{k_j,j}) \geqslant \big(1 - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n 2^{-i}\big) \cdot \mu M$ e faça $b_{\varepsilon \cdot \mu M} := M \setminus \big(\bigcap_n a_{k_n,n}\big)$.)

6. Teorema de Carathéodory. Dimensão e medida de Hausdorff

Beber tudo o que se inflama,
Foder tudo o que se move,
Medir tudo o que se mede.
— *Um lema do machismo*

6.1. Definição. Seja M um espaço topológico Hausdorff. Denotemos por C o conjunto de todos os subespaços compactos em M. Um *volume* sobre M é uma função $\lambda : C \to [0, \infty]$ satisfazendo as propriedades

m. $c_1 \subset c_2 \Rightarrow \lambda c_1 \leqslant \lambda c_2$,
a. $\lambda(c_1 \sqcup c_2) = \lambda c_1 + \lambda c_2$,
sa. $\lambda(c_1 \cup c_2) \leqslant \lambda c_1 + \lambda c_2$.

para todos $c_1, c_2 \in C$.

(Por exemplo, o número λc de pontos de um compacto $c \subset \mathbb{R}^n =: M$ cujas coordenadas são inteiras satisfaz as mencionadas propriedades.)

6.2. Definição. Seja $\lambda : C \to [0, \infty]$ um volume sobre um espaço topológico M. Para qualquer aberto $a \subset M$ definimos a *medida interna* $\lambda_* a := \sup_{c \subset a} \lambda c$, onde $c \in C$. Para $b \subset M$ arbitrário, definamos a *medida externa* $\lambda^* b := \inf_{a \supset b} \lambda_* a$, onde a percorre todas as vizinhanças abertas de b.

Um dos objetivos desta seção é demonstrar o seguinte teorema.

6.3. Teorema (da extensão de Carathéodory)**.** *Seja M um espaço topológico Hausdorff e seja $\lambda : C \to [0, \infty]$ um volume sobre M. Então a medida externa λ^* se estende a uma medida σ-aditiva sobre a σ-álgebra S gerada por todos os subespaços compactos de M.*

6.4. Exercício. Note que $a_1 \subset a_2$ implica $\lambda_* a_1 \leqslant \lambda_* a_2$ para todos abertos $a_1, a_2 \subset M$, que $b_1 \subset b_2$ implica $\lambda^* b_1 \leqslant \lambda^* b_2$ para quaisquer $b_1, b_2 \subset C$, que $\lambda^* a = \lambda_* a$ para todo aberto $a \subset M$ e que $\lambda c \leqslant \lambda^* c$ para todo compacto $c \subset M$.

6.5. Exercício. Mostre que quaisquer compactos disjuntos $c_1, c_2 \subset M$ em um espaço topológico Hausdorff M possuem vizinhanças abertas disjuntas.

6.6. Exercício. Se $a_1 \cup a_2 \supset c$ é um compacto e a_1, a_2 são abertos, então existem compactos $c_i \subset a_i$, $i = 1, 2$, tais que $c = c_1 \cup c_2$. (Dica: os compactos disjuntos $c \setminus a_i$, $i = 1, 2$, possuem vizinhanças abertas disjuntas $u_i \supset c \setminus a_i$, $i = 1, 2$, pelo Exercício 6.5; faça $c_i := c \setminus u_i$.)

6.7. Exercício. Mostre que $\lambda_*(a_1 \cup a_2) \leqslant \lambda_* a_1 + \lambda_* a_2$ para quaisquer abertos a_1, a_2. (Dica: Se $a_1 \cup a_2 \supset c$ é um compacto, então $\lambda c \leqslant \lambda c_1 + \lambda c_2$ pela propriedade **sa**, onde c_1, c_2 foram construídos no Exercício 6.6. Daí, $\lambda_*(a_1 \cup a_2) \leqslant \lambda_* a_1 + \lambda_* a_2$.)

6.8. Exercício. Mostre que $\lambda^*(b_1 \cup b_2) \leqslant \lambda^* b_1 + \lambda^* b_2$ para quaisquer $b_1, b_2 \subset M$. (Dica: Para $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem vizinhanças abertas $a_i \supset b_i$, $i = 1, 2$, tais que $\lambda_* a_1 + \lambda_* a_2 - \varepsilon \leqslant \lambda^* b_1 + \lambda^* b_2$. Pelo Exercício 6.7, $\lambda^*(b_1 \cup b_2) - \varepsilon \leqslant \lambda_*(a_1 \cup a_2) - \varepsilon \leqslant \lambda_* a_1 + \lambda_* a_2 - \varepsilon \leqslant \lambda^* b_1 + \lambda^* b_2$.)

6.9. Exercício. Mostre que λ^* é σ-semiaditiva, isto é, para quaisquer $b_i \subset M$, $i \in \mathbb{N}$, vale $\lambda^*\big(\bigcup_i b_i\big) \leqslant \sum_i \lambda^* b_i$. (Dica: Reduza a questão ao caso $\lambda_*\big(\bigcup_i a_i\big) \leqslant \sum_i \lambda_* a_i$, onde $M \supset a_i$, $i \in \mathbb{N}$, são abertos. Se $\bigcup_i a_i \supset c$ é um compacto, então $c \subset \bigcup_{i=1}^n a_i$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda c \leqslant \lambda^* c \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda^* a_i \leqslant \sum_i \lambda_* a_i$ pelos Exercícios 6.4, 6.8 e 6.4.)

6.10. Definição. Seja $\lambda : C \to [0, \infty]$ um volume sobre um espaço topológico M. Dizemos que um subconjunto $b \subset M$ é *Carathéodory mensurável* se $\lambda^*(x \setminus b) + \lambda^*(x \cap b) = \lambda^* x$ para todo $x \subset M$.

6.11. Observação. *Para concluir que $M \supset b$ é Carathéodory mensurável, basta verificar a condição $\lambda^*(a \setminus b) + \lambda^*(a \cap b) = \lambda^* a$ para todo aberto $a \subset M$.*

Demonstração. Pelo Exercício 6.8, $\lambda^* x \leqslant \lambda^*(x \setminus b) + \lambda^*(x \cap b)$. Pelo Exercício 6.4, $\lambda^* x = \inf_{a \supset x} \lambda_* a = \inf_{a \supset x} \big(\lambda^*(a \setminus b) + \lambda^*(a \cap b)\big) \geqslant \lambda^*(x \setminus b) + \lambda^*(x \cap b)$ ■

6.12. Lema. *Seja $\lambda : C \to [0, \infty]$ um volume sobre um espaço topológico Hausdorff M. Então todo compacto $c \subset M$ é Carathéodory mensurável.*

Demonstração. Pela Observação 6.11, basta mostrar que $\lambda^*(a \setminus c) + \lambda^*(a \cap c) = \lambda^* a$ para todo aberto $a \subset M$. Pelo Exercício 6.8, $\lambda^*(a \setminus c) + \lambda^*(a \cap c) \geqslant \lambda^* a$.

Sendo $M \supset a \setminus c$ aberto, obtemos $\lambda^*(a \setminus c) = \sup_{c_1 \subset a \setminus c} \lambda c_1$ pelo Exercício 6.4. Logo, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um compacto $c_1 \subset a \setminus c$ tal que $\lambda^*(a \setminus c) \leqslant \varepsilon + \lambda c_1$. Existe uma vizinhança aberta $a_1 \supset c$ (por exemplo, podemos tomar $a_1 := M \setminus c_1$) tal que $a_1 \cap c_1 = \varnothing$. Pelo Exercício 6.4, $\lambda^*(a \cap c) \leqslant \lambda^*(a \cap a_1) = \sup_{c_2 \subset a \cap a_1} \lambda c_2$. Note que $c_2 \subset a \cap a_1$ implica $c_1 \cap c_2 = \varnothing$ e $c_1 \sqcup c_2 \subset a$. Agora,

$$\lambda^*(a \setminus c) + \lambda^*(a \cap c) \leqslant \varepsilon + \lambda c_1 + \sup_{c_2 \subset a \cap a_1} \lambda c_2 =$$

$$= \varepsilon + \sup_{c_2 \subset a \cap a_1} (\lambda c_1 + \lambda c_2) = \varepsilon + \sup_{c_2 \subset a \cap a_1} \lambda(c_1 \sqcup c_2) \leqslant \varepsilon + \lambda^* a$$

pela propriedade **a** e pelo Exercício 6.4 ■

6.13. Lema. *Seja $\lambda : C \to [0, \infty]$ um volume sobre um espaço topológico Hausdorff M. Então os conjuntos Carathéodory mensuráveis formam uma álgebra booleana.*

Demonstração. Se $\lambda^*(x \setminus b) + \lambda^*(x \cap b) = \lambda^* x$, então $\lambda^*(x \setminus b') + \lambda^*(x \cap b') = \lambda^* x$, onde $b' := M \setminus b$, pois $x \setminus b' = x \cap b$ e $x \cap b' = x \setminus b$.

Sejam $M \supset b_1, b_2$ Carathéodory mensuráveis. Mostraremos que $b_1 \cap b_2$ é Carathéodory mensurável. Para qualquer $x \subset M$, temos $\lambda^*\big(x \setminus (b_1 \cap b_2)\big) + \lambda^*\big(x \cap (b_1 \cap b_2)\big) \geqslant \lambda^* x$ pelo Exercício 6.8.

Já que $x \setminus (b_1 \cap b_2) = \big((x \setminus b_1) \setminus b_2\big) \sqcup \big((x \setminus b_1) \cap b_2\big) \sqcup \big((x \cap b_1) \setminus b_2\big)$, concluímos, pelo Exercício 6.8, que $\lambda^*\big((x \setminus b_1) \setminus b_2\big) + \lambda^*\big((x \setminus b_1) \cap b_2\big) + \lambda^*\big((x \cap b_1) \setminus b_2\big) \geqslant \lambda^*\big(x \setminus (b_1 \cap b_2)\big)$. Sendo b_1, b_2 Carathéodory mensuráveis, obtemos $\lambda^*x = \lambda * \big((x \setminus b_1) \setminus b_2\big) + \lambda^*\big((x \setminus b_1) \cap b_2\big) + \lambda^*\big((x \cap b_1) \setminus b_2\big) + \lambda^*\big((x \cap b_1) \cap b_2\big) \geqslant \lambda^*\big(x \setminus (b_1 \cap b_2)\big) + \lambda^*\big(x \cap (b_1 \cap b_2)\big)$ ■

6.14. Teorema. *Seja $\lambda : C \to [0, \infty]$ um volume sobre um espaço topológico Hausdorff M. Então a família K de todos os conjuntos Carathéodory mensuráveis é uma σ-álgebra e a medida externa λ^* é σ-aditiva sobre K.*

Demonstração. Pelo Lema 6.13, K é uma álgebra booleana.

Seja $M \supset b_i$, $i \in \mathbb{N}$, uma família disjunta de conjuntos Carathéodory mensuraveis e seja $y \subset M$. Fazendo $x := y \cap (\sqcup_{i=1}^n b_i)$ em $\lambda^*(x \setminus b_n) + \lambda^*(x \cap b_n) = \lambda^*x$, obtemos $\lambda^*\big(y \cap (\sqcup_{i=1}^{n-1} b_i)\big) + \lambda^*(y \cap b_n) = \lambda^*\big(y \cap (\sqcup_{i=1}^n b_i)\big)$ e, portanto, $\sum_{i=1}^n \lambda^*(y \cap b_i) = \lambda^*(y \cap (\sqcup_{i=1}^n b_i)$. Daí, pelo Exercício 6.4, $\sum_{i=1}^n \lambda^*(y \cap b_i) \leqslant \lambda^*(y \cap (\sqcup_i b_i)\big)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\sum_i \lambda^*(y \cap b_i) \leqslant \lambda^*(y \cap (\sqcup_i b_i)\big)$. Pelo Exercício 6.9,

$$\sum_i \lambda^*(y \cap b_i) = \lambda^*(y \cap (\sqcup_i b_i)\big). \tag{6.15}$$

Consequentemente, $\lambda^*(y \cap (\sqcup_i b_i)\big) = \sum_i \lambda^*(y \cap b_i) = \lim_n \sum_{i=1}^n \lambda^*(y \cap b_i) = \lim_n \lambda^*\big(y \cap (\sqcup_{i=1}^n b_i)\big) = \lambda^*y - \lim_n \lambda^*\big(y \setminus (\sqcup_{i=1}^n b_i)\big) \leqslant \lambda^*y - \lambda^*\big(y \setminus (\sqcup_i b_i)\big)$, onde a penúltima igualdade segue da igualdade (6.15) aplicada a uma família finita, a última igualdade vale pois $\sqcup_{i=1}^n b_i$ é Carathéodory mensurável e a desigualdade vale pela monotonicidade de λ^* (vide o Exercício 6.4). Assim, $\lambda^*(y \setminus (\sqcup_i b_i)\big) + \lambda^*(y \cap (\sqcup_i b_i)\big) \leqslant \lambda^*y$. Pelo Exercício 6.8, $\lambda^*(y \setminus (\sqcup_i b_i)\big) + \lambda^*(y \cap (\sqcup_i b_i)\big) \geqslant \lambda^*y$. Concluímos que $\sqcup_i b_i$ é Carathéodory mensurável. Tomando $y := M$ em (6.15), obtemos a σ-aditividade de λ^* ■

Demonstração do Teorema 6.3. O teorema segue imediatamente dos Lema 6.12 e Teorema 6.14 ■

6.16. Exercício. Construa um espaço métrico com volume $\lambda : C \to [0, \infty]$ tal que $\lambda c < \lambda^* c$ para algum $c \in C$.

Constantin Carathéodory nasceu em Berlim em 1873. Seu pai, Stephanos Carathéodory, foi um diplomata turco na Alemanha. Logo após o nascimento de seu filho, Stephanos Carathéodory foi designado embaixador na Bélgica e mudou-se para Bruxelas.

Constantin Carathéodory
13 de setembro de 1873 – 2 de fevereiro de 1950

Grego por sua nacionalidade, Constantin Carathéodory se originou de uma famosa família de médicos e diplomatas otomanos. Seu tio-avô, Alexandre Carathéodory Pascha, foi ministro de relações exteriores do Império Otomano e representou os turcos no Congresso de Berlim de 1878, no qual a Turquia ganhou de volta quase todos os terrenos perdidos como resultados de ações militares mal-sucedidas.

O avô de Constantin Carathéodory, também Constantin, foi um famoso médico e ginecologista turco. Ele lecionou na escola de medicina imperial e escreveu um livro sobre o combate à peste bubônica. Foi também glorificado por ter retirado do rim de um paciente com cáculos renais uma pedra de um quilo e meio. O paciente sobreviveu.

Constantin Carathéodory (foto de Konrad Jacobs, 1932, Erlanger)

Constantin Carathéodory cresceu e foi educado em Bruxelas. Ele sabia com perfeição várias línguas européias, grego antigo e latim, e por duas vezes ficou em primeiro lugar nas olimpíadas nacionais de matemática da Bélgica.

Durante suas frequentes visitas a Grécia, Carathéodory tornou-se amigo de Elefthérios Venizélos (1863–1936), famoso revolucionário e arquiteto do estado grego contemporâneo.

Durante a guerra greco-turca de 1897, Carathéodory apoiou os gregos, o que colocou seu pai, servidor do governo turco, em uma posição desconfortável. Como resultado, Carathéodory recebeu um emprego de engenheiro no serviço colonial britânico, passou alguns anos no Egito estudando a pirâmide de Quéops e escreveu um livro sobre egiptologia. Em 1900, Carathéodory entrou na Universidade de Berlim, onde assistiu palestras de Frobenius e de Hermann Schwartz, reconhecido pela desigualdade de Cauchy-Schwartz (também chamada de Cauchy-Bunyakowsky) e pelo lema de Schwartz da análise complexa.

Em pouco tempo, Carathéodory mudou-se para Göttingen, onde defendeu uma tese sobre cálculo variacional sob a orientação de Minkowski. Após passar breves períodos nas universidade de Bonn, Hannover e Breslau, ele voltou para Göttingen em 1913 onde tornou-se professor, ocupando a posição liberada por Felix Klein.

Seguindo as tradições da sua família, que praticava casamentos intrafamiliares, Carathéodory casou-se com sua tia Euphrosyne, a qual era 12 anos mais nova do que ele.

Durante a primeira guerra mundial, Carathéodory viveu na Alemanha e não serviu no exército, pois era de nacionalidade grega (a Grécia estava do lado dos aliados). Após a guerra, voltou para a Grécia a pedido de Elefthérios Venizélos, que planejava fundar novas universidades em Esmirna e em Tessalônica, sob a direção de Carathéodory.

Carathéodory foi oficialmente designado reitor da universidade em Esmirna, mas os planos de Venizélos não foram bem sucedidos. Logo após a assinatura de um tratado de paz com os turcos (cujas condições eram extremamente favoráveis à Grécia),[9] o rei grego Alexandre, inclinado ao liberalismo, foi mordido por macacos e, em 25 de outubro, morreu de septicemia. Depois disto, foram anunciadas eleições nos quais o partido de Venizélos sofreu uma derrota esmagadora. Venizélos foi vítima de uma tentativa de assassinato por parte dos antiliberais e por muito pouco sobreviveu, afastando-se então da política e migrando para Paris. Ao poder chegou o partido dos antivenizelistas, que demitiram metade dos generais (suspeitos de simpatizar com Venizélos) e continuaram a guerra contra a Turquia na esperança de ocupar ainda mais territórios. Por fim, o tratado de Sèvres não foi ratificado nem pela Turquia (onde neste exato momento ocorria a revolução Kemalista), nem pela Grécia.

Winston Churchill disse, referindo-se à morte do rei Alexandre: "uma mordida de macaco que matou 250 mil pessoas". O resultado da campanha militar dos antivenizelistas foi a derrota total da Grécia e a perda de todos os territórios aos quais o país teria direito pelas condições do tratado de Sèvres. Dentre outros, os turcos ocuparam Esmirna, queimaram a cidade e expulsaram de lá todos os gregos. Carathéodory, que heróicamente encabeçou a evacuação da universidade, continuou na Grécia por mais algum tempo, como professor em Atenas, mas retirou-se em 1924 para Munique onde ocupou a cátedra liberada por Lindemann (o aluno de Klein que provou a transcendência de π). Lá, Carathéodory foi professor até a sua morte, em 1950.

Após a chegada ao poder do partido liberal, sob liderança de Venizélos (1928), Carathéodory dedicou-se muito ao desenvolvimento da ciência grega. Ele fundou a universidade de Tessalônica, participou ativamente da reforma da universidade de Atenas e publicou um trabalho sobre a geometria do Parthenon grego.

Carathéodory é mais famoso por seus trabalhos na teoria da medida e termodinâmica. Ele foi o primeiro a inventar a construção da teoria da medida do ponto de vista algébrico sobre uma álgebra booleana arbitrária. Ele inventou a axiomática da termodinâmica que até hoje é a utilizada em todos os lugares. Carathéodory foi o primeiro a estudar métricas subriemannianas, bastante importantes nas teorias de contato e controle (tais métricas também se chamam métricas de Carnot-Carathéodory). Além disso, Carathéodory dedicou-se à óptica e à astronomia, tendo publicado trabalhos sobre a construção optimal de telescópios.

Carathéodory teve grande influência sobre Einstein, quem estava agradecendo-lhe muito pela ajuda no desenvolvimento da teoria da relatividade geral.

6.17. Definição. Sejam M um espaço métrico, $d \in [0, \infty]$ e $\varepsilon > 0$. Para qualquer $b \subset M$, definimos $\lambda_{d,\varepsilon} b := \inf \sum_i r_i^d$, onde no ínfimo percorremos todas as coberturas $b \subset \bigcup_i B(c_i, r_i)$ de b por bolas abertas de raios $r_i < \varepsilon$. Sendo a função $\lambda_{d,\varepsilon} b$ monótona não-crescente em ε, obtemos o limite $\lambda_d b := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_{d,\varepsilon} b \in [0, \infty]$.

6.18. Lema. *Seja M um espaço métrico e seja $d \in [0, \infty]$. Então $\lambda_d : C \to [0, \infty]$ é um volume sobre M.*

Demonstração. As propriedades **m** e **sa** são óbvias. Mostraremos a propriedade **a**.

Sejam $C \ni c_1, c_2$ disjuntos, $c_1 \cap c_2 = \varnothing$. A métrica d define uma função contínua $c_1 \times c_2 \to \mathbb{R}$. Já que $c_1 \times c_2$ é um compacto, esta função assume seu mínimo, denotado por $\mathrm{d}(c_1, c_2) > 0$. Se $2r \leqslant \mathrm{d}(c_1, c_2)$, então nenhuma bola aberta $B(c, r)$ pode interceptar ambos os c_1, c_2. Logo, $\lambda_{d,\varepsilon}(c_1 \sqcup c_2) = \lambda_{d,\varepsilon} c_1 + \lambda_{d,\varepsilon} c_2$ se $2\varepsilon \leqslant \mathrm{d}(c_1, c_2)$ ■

6.19. Definição. A medida λ_d^* é dita *d-medida de Hausdorff.*

6E. Exercícios

[9] Tratado de Sèvres, 10 de outubro de 1920.

1. Mostre que $\mu^* c = \mu c$ para todo compacto $c \subset \mathbb{R}^n$, onde μ denota a medida de Lebesgue. (Dica: $\mu_* a = \mu a$, pois todo aberto a é a união enumerável de uma cadeia crescente de compactos; $\mu^* c = \mu c$, pois todo compacto c é a interseção de uma cadeia enumerável decrescente de abertos.)

2. Para um compacto $c \subset M$ em um espaço métrico M, denotemos por $n_r c$ o número mínimo de r-bolas que cobrem c. Seja $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ uma função não-decrescente tal que $\lim_{r \to 0^+} \varphi r = 0$. Para qualquer $c \in C$, definamos $\lambda c = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{r \in (0, \varepsilon)} \varphi r \cdot n_r c$. Mostre que λ é um volume sobre M. (Dica: para verificar **a**, note que $n_r(c_1 \sqcup c_2) = n_r c_1 + n_r c_2$ se $2r \leqslant \mathrm{d}(c_1, c_2)$.)