# Метрическая топология

В этом курсе мы будем изучать основы топологии метрических пространств: ???

## 1. Метрические пространства

Часто оказывается полезным измерять дистанции между разными математическими объектами. Так, например, мы можем мерить расстояния между элементами данного множества, между функциями и отображениями разных типов, между (метрическими) пространствами, etc.

**1.1. Определение.** *Метрическое пространство* — это множество $X$ вместе с функцией $\mathrm{d} : X \times X \to [0, \infty[$, называемой *метрикой,* удовлетворяющие следующим условиям:

• для любых $x_1, x_2 \in X$ равенство $\mathrm{d}(x_1, x_2) = 0$ эквивалентно равенству $x_1 = x_2$;
• $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(x_2, x_1)$ для всех $x_1, x_2 \in X$ (*симметричность* метрики);
• $\mathrm{d}(x_1, x_3) \leqslant \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, x_3)$ для всех $x_1, x_2, x_3 \in X$ (*неравенство треугольника* или *субаддитивность* метрики).

*Подпространство* метрического пространства — это произвольное подмножество метрического пространства, снабженное по умолчанию индуцированной метрикой; оно очевидно является метрическим пространством.

Определение 1.1 допускает многочисленные вариации. Здесь мы рассмотрим лишь пару из них.

**1.1.1. $\infty$-метрические пространства.** Иногда бывает удобно допускать бесконечные расстояния. Другими словами, метрика $\mathrm{d} : X \times X \to [0, \infty]$ принимает значения в "сегменте" $[0, \infty] := [0, \infty[ \sqcup \infty$ и удовлетворяет аксиомам из определения 1.1. Такое пространство называется $\infty$-*метрическим пространством*, а соответствующая метрика — *расширенной* или $\infty$-*метрикой.*

Отношение $\mathrm{d}(x_1, x_2) \neq \infty$ является отношением эквивалентности, а каждый класс эквивалентности является метрическим пространством в смысле определения 1.1, то есть с конечными расстояниями. При этом расстояния между двумя точками из разных классов равно бесконечности $\infty$. Ясно, что такого рода метрическое пространство $(X, \mathrm{d})$ фактически изготовлено из дизъюнктного семества $(X_i, \mathrm{d}_i)$, $i \in I$, метрических пространств, каждое с конечными расстояниями. Мы лишь доопределяем метрики $\mathrm{d}_i$, $i \in I$, бесконечными значениями на $X := \bigsqcup\limits_{i\in I} X_i$, а именно, полагаем $\mathrm{d}(x, x') = \infty$ для любых $x \in X_i$ и $x' \in X_{i'}$ при различных $i, i' \in I$, $i \neq i'$.

**1.1.2. Полуметрика.** Другая вариация получается, если мы заменим первую аксиому на условие "$\mathrm{d}(x, x) = 0$ для любого $x \in X$". Теперь функция $\mathrm{d}$ называется *полуметрикой* ($\infty$-*полуметрика* тоже интересна), и отношение $\mathrm{d}(x_1, x_2) = 0$, обозначаемое далее как $\sim$, является эквивалентностью. Формула $\mathrm{d}\big([x_1], [x_2]\big) := \mathrm{d}(x_1, x_2)$, как легко видеть, корректно определяет метрику на фактор-множестве $X/\sim$.

**1.1.3. Заключение.** Нет никакой разницы между ($\infty$-)полуметрикой на данном множестве $X$ и сюръекцией из $X$ на какое-то ($\infty$-)метрическое пространство. Это один и тот же объект, рассматриваемый с разных сторон.

Обозначим через $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ копий}}$ множество всех упорядоченных $n$-ок действительных чисел. Это множество называется *$n$-мерным пространством с координатами.* Можно определить следующие метрики на $\mathbb{R}^n$ (среди прочих).

**1.2. Примеры.** Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$.

**1.2.1. Метрика $L^p$.** Зафиксируем действительное число $p \geqslant 1$ и определим

$$\mathrm{d}_p(x, y) := \big(|y_1 - x_1|^p + \cdots + |y_n - x_n|^p\big)^{1/p}.$$

Когда $p = 2$, мы получаем на плоскости с координатами или в пространстве с координатами ту самую *эвклидову* метрику, которую вы изучали в школе.

**1.2.2. Метрика $L^\infty$.** $\mathrm{d}_\infty(x, y) := \max\big\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\big\}$.

**1.3. Упражнение.** Покажите, что $\mathrm{d}_1$ и $\mathrm{d}_\infty$ в самом деле являются метриками.

Доказательство неравенства треугольника для метрики $L^p$ с $1 < p < \infty$ откладывается (см. упражнение ???), поскольку не вполне элементарно, и нам будет удобнее им заниматься, когда у нас в руках будет уже инструмент анализа называемый “производная”.

**1.4. Определение.** Пусть $(X, \mathrm{d})$ — метрическое пространство. Пусть $X \ni c$ — точка и $0 < r$ — действительное число. Определим *открытый шар радиуса $r$* с *центром $c$* при помощи формулы

$$B(c; r) := B_{\mathrm{d}}(c; r) := B_X(c; r) := B_{X,\mathrm{d}}(c; r) := \{x \in X \mid \mathrm{d}(c, x) < r\}$$

и *замкнутый шар радиуса $r$* с *центром $c$* при помощи формулы

$$B[c; r] := B_{\mathrm{d}}[c; r] := B_X[c; r] := B_{X,\mathrm{d}}[c; r] := \{x \in X \mid \mathrm{d}(c, x) \leqslant r\}.$$

Словами: открытый (замкнутый) шар радиуса $r$ с центром $c$ — это множество всех тех точек пространства $X$, что находятся от точки $c$ на дистанции меньшей (или равной) $r$.

**1.5. Упражнение.** Проверьте, что открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством. Таким образом, использование слова “открытый” не приводит к двусмысленности.

**1.6. Упражнение.** Пусть $X$ — метрическое пространство, $X \ni c$ — точка и $0 < r$ — действительное число. Проверьте, является ли замыкание открытого шара замкнутым шаром, то есть верно ли, что $\overline{B(c; r)} = B[c; r]$ ?

**1.7. Упражнение.** Нарисуйте какой-нибудь открытый (замкнутый) шар в $\mathbb{R}^2$ для метрик $L^1$, $L^2$ и $L^\infty$. Метрика $L^1$ называется также *метрикой Манхэттена* или *метрикой такси.*

**1.8. Действительные числа. Пополнение.** В определении 1.1 метрического пространства участвуют действительные числа, а они до сих пор не определены. Тем не менее, мы имеем по крайней мере одно вполне корректно определенное метрическое пространство $(\mathbb{Q}, \mathrm{d})$, где $\mathrm{d}(q_1, q_2) := |q_2 - q_1|$ для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. В этом пункте мы построим пополнение произвольного метрического пространства, но сначала построим пополнение $\mathbb{R}$ метрического пространства $\mathbb{Q}$. При этом определение 1.8.2 будет применимо к произвольному метрическому пространству. При первом чтении числа в этом определении следует воспринимать как рациональные, пока не построены действительные.

На самом деле, для того, чтобы построить пополнение пространства $X$, важна так называемая *равномерная структура* на $X$. Она более сильная, чем обычная топология, но более слабая, чем структура метрического пространства. Ниже для простоты мы пополняем метрические пространства, хотя было бы безусловно правильнее иметь дело с равномерными пространствами, не используя счетности базы окрестностей точки и пределов последовательностей. В свое время мы определим и обсудим равномерные структуры.

**1.8.1.** Вот список используемых ниже свойств рациональных чисел, которые желающие могут легко проверить самостоятельно.

- Для любых $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ справедливо неравенство $|q_1 + q_2| \leqslant |q_1| + |q_2|$. Оно влечет неравенство треугольника для метрического пространства $(\mathbb{Q}, \mathrm{d})$.
- Для любых $q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ из $q_1 \leqslant q_2$ следует $q_1 \pm q \leqslant q_2 \pm q$, а из $0 \leqslant q$ и $q_1 \leqslant q_2$ следует $qq_1 \leqslant qq_2$.
- Для любого $0 < q \in \mathbb{Q}$ существует $0 \neq n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{n} < q$.
- Если пределы $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q'_n$ существуют, то $\lim\limits_{n\to\infty} (q_n \pm q'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} q_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} q'_n$.
- Если $0 \leqslant q'_n \leqslant q_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q'_n = 0$.

**1.8.2. Определение.** Последовательность $\mathbb{N} \xrightarrow{s} X$ в метрическом пространстве $(X, \mathrm{d})$ называется *последовательностью Коши,* если для каждого $r > 0$ все члены последовательности, кроме конечного числа, содержатся в некотором открытом шаре радиуса $r$. В символах: $\forall r > 0\ \exists c \in X\ \bigl|\mathbb{N} \setminus s^{-1}B(c;r)\bigr| < \infty$. Эквивалентное определение: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, n' \in \mathbb{N}\ n_0 \leqslant n, n' \Rightarrow \mathrm{d}\bigl(s(n), s(n')\bigr) \leqslant \varepsilon$.

Ясно, что всякая сходящаяся последовательность — это последовательность Коши. Если же любая последовательность Коши имеет предел в метрическом пространстве, то это пространство называется *полным.* Любое замкнутое подпространство полного метрического пространства очевидно является полным. Любое полное подпространство произвольного метрического пространства является замкнутым.

Последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{s_1} X$ и $\mathbb{N} \xrightarrow{s_2} X$ считаются *эквивалентными,* символически $s_1 \sim s_2$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}\bigl(s_1(n), s_2(n)\bigr) = 0$. Из определения 1.1 и свойств пределов следует, что $\sim$ — отношение эквивалентности.

Обозначим $\hat{X} := S/{\sim}$ и определим функцию $\iota : X \to \hat{X}$, $\iota : p \mapsto [\mathbb{N} \to p]$, где $S$ — множество всех последовательностей Коши в пространстве $X$ и $[\mathbb{N} \to p]$ — класс эквивалентности постоянной последовательности $\mathbb{N} \to p$. Очевидно, $\iota$ — вложение.

В частном случае, когда $(X, \mathrm{d}) = (\mathbb{Q}, \mathrm{d})$, обозначаем $\mathbb{R} := \hat{X}$.

**1.8.3. Упражнение.** Пусть $\mathbb{N} \xrightarrow{s} X$ и $\mathbb{N} \xrightarrow{s'} X$ — эквивалентные последовательности в метрическом пространстве $X$, и пусть $\mathbb{N} \xrightarrow{t} \mathbb{N}$ — функция с конечными прообразами элементов, то есть $\forall n \in \mathbb{N}\ |t^{-1}n| < \infty$.

Заметьте, что сходимости последовательностей $s$ и $s'$ эквивалентны, и в случае сходимости, их пределы совпадают.

Предположим, что $s$ — последовательность Коши. Убедитесь, что $s'$ — последовательность Коши. Докажите, что $s \circ t$ — последовательность Коши, эквивалентная $s$.

**1.8.4. Упражнение.** Пусть $\iota 0 \neq r \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{Q}$ — соответствующая последовательность Коши, $r = [s]$. Докажите, что существует рациональное число $q \in \mathbb{Q}$ такое, что

$0 < q < s(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа, либо $s(n) < q < 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа.

**1.8.5. Определение.** Для последовательностей Коши $\mathbb{N} \xrightarrow{s_1} \mathbb{Q}$ и $\mathbb{N} \xrightarrow{s_2} \mathbb{Q}$ определим *сумму/разность* $[s_1] \pm [s_2] := [s_1 \pm s_2]$, где $(s_1 \pm s_2)(n) := s_1(n) \pm s_2(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и *строгий порядок* на $\mathbb{R}$, декларируя, что $[s_1] < [s_2]$, если $[s_1] \neq [s_2]$ и $s_1(n) < s_2(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа.

**1.8.6. Упражнение.** Используя упражнение 1.8.4, заметьте, что неравенство $[s_1] < [s_2]$ эквивалентно существованию чисел $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ таких, что $s_1(n) < q_1 < q_2 < s_2(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа.

Проверьте корректность определения 1.8.5 и покажите, что $\leqslant$ — линейный порядок на $\mathbb{R}$ совместимый со сложением; последнее означает, что $[s_1] \leqslant [s_2] \Rightarrow [s_1] \pm [s] \leqslant [s_2] \pm [s]$ для любых $[s], [s_1], [s_2] \in \mathbb{R}$.

Для любого $r \in \mathbb{R}$, определим $|r| := r$, если $r \geqslant \iota 0$, и $|r| := -r$, если $r \leqslant \iota 0$. Докажите неравенство $|r_1+r_2| \leqslant |r_1|+|r_2|$ для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$, где $\mathrm{d}(r_1, r_2) := |r_2 - r_1|$, — метрическое пространство, причем вложение $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ сохраняет порядок, сложение/вычитание и метрику.

**1.8.7. Предложение** (полнота $\mathbb{R}$)**.** *Подмножество $\iota\mathbb{Q}$ является плотным в полном метрическом пространстве* $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbb{R} \ni [s]$ — произвольный элемент, то есть $\mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{Q}$ — последовательность Коши в $\mathbb{Q}$. Докажем, что $[s] = \lim\limits_{n\to\infty} [\iota q_n]$, где $q_n := s(n)$. Пусть $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Мы хотим доказать, что $[\iota q_n] \in B\big[[s]; \varepsilon\big]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа. В силу упражнения 1.8.4, существует $0 < q \in \mathbb{Q}$ такой, что $[\iota q] \leqslant \varepsilon$, поэтому можно взять $[\iota q]$ вместо $\varepsilon$. Используя второй вариант определения 1.8.2 для последовательности Коши, мы имеем $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\mathrm{d}(q_n, q'_n) \leqslant q$ для всех $n, n' \geqslant n_0$. Остается заметить, что для любого $n \geqslant n_0$, выполнено $[\iota q_n] \in B\big[[s]; [\iota q]\big]$, то есть $[-\iota q] \leqslant [\iota q_n - s] \leqslant [\iota q]$; это следствие неравенств $-q \leqslant q_n - q_{n'} \leqslant q$ справедливых для всех $n' \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа (а именно, для всех $n' \geqslant n_0$).

Пусть $\mathbb{N} \xrightarrow{t} \mathbb{R}$ — произвольная последовательность Коши в $\mathbb{R}$. Докажем, что она имеет предел. В силу плотности $\iota\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы можем выбрать $q_n \in \mathbb{Q}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mathrm{d}\big(\iota q_n, t(n)\big) < \frac{1}{n}$. Благодаря упражнению 1.8.3 и тому факту, что $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ сохраняет метрику, мы можем заменить последовательность $t$ на эквивалентную ей последовательность $r : n \mapsto \iota q_n$ и заметить, что $\mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{Q}$, $s : n \mapsto q_n$, — последовательность Коши в $\mathbb{Q}$. Мы уже доказали выше, что $[s] = \lim\limits_{n\to\infty} [\iota q_n]$ ■

**1.8.8. Упражнение.** Пусть $\mathbb{N} \xrightarrow{s_1} X$ и $\mathbb{N} \xrightarrow{s_2} X$ — последовательности Коши в метрическом пространстве $(X, \mathrm{d})$. Проверьте, что $n \mapsto \mathrm{d}\big(s_1(n), s_2(n)\big)$ — последовательность Коши в $\mathbb{R}$, что формула $\mathrm{d}\big([s_1], [s_2]\big) := \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}\big(s_1(n), s_2(n)\big)$ задает корректно метрику на $\hat{X}$ и что вложение $\iota : X \to \hat{X}$ сохраняет метрику.

**1.8.9. Упражнение.** Копируя почти дословно (с некоторыми упрощениями) доказательство предложения 1.8.7, докажите, что $\iota X$ плотно в полном метрическом пространстве $(\hat{X}, \mathrm{d})$.

**1.8.10. Упражнение.** Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства, причем $Y$ — полное. Тогда любая функция $f : X \to Y$ сохраняющая метрику (следовательно, являющаяся непрерывным вложением) продолжается единственным образом до сохраняющей метрику функции $\hat{f} : \hat{X} \to Y$.

**1.8.11. Замечание.** Пополнение $\infty$-метрического пространства $(X, \mathrm{d})$ осуществляется дословно так же, как пополнение метрического пространства. При этом просто пополняется каждое подпространство $(X_i, \mathrm{d}_i)$, $i \in I$, из разбиения $X = \bigsqcup\limits_{i \in I} X_i$ $\infty$-метрического пространства $X$ на метрические подпространства с конечной метрикой (см. 1.1.1).

**1.8.12. Определение.** Если метрическое пространство $(X, \mathrm{d})$ является абелевой группой с *трансляционно инвариантной* метрикой, то есть $\mathrm{d}(x_1{+}x, x_2{+}x) = \mathrm{d}(x_1, x_2)$ для всех $x, x_1, x_2 \in X$, то метрика на $X$ происходит из *нормы* данной формулой $\nu(x) := \mathrm{d}(0, x)$. Метрика восстанавливается из нормы по формуле $\mathrm{d}(x_1, x_2) := \nu(x_2 - x_1)$. *Норма* на абелевой группе $(X, +)$ — это функция $\nu : X \to [0, \infty[$ удовлетворяющая следующим аксиомам:

- для любого $x \in X$ равенство $\nu(x) = 0$ эквивалентно равенству $x = 0$;
- $\nu(-x) = \nu(x)$ для всех $x \in X$ (*симметричность* нормы);
- $\nu(x_1 + x_2) \leqslant \nu(x_1) + \nu(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$ (*неравенство треугольника* или *субаддитивность* нормы).

В такой ситуации мы называем $(X, +, \nu)$ *нормированной абелевой группой.*

Пусть $(X, +, \cdot)$ — кольцо и $\nu$ — норма для его аддитивной группы $(X, +)$. Если

- $\nu(x_1 \cdot x_2) \leqslant \nu(x_1) \cdot \nu(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$ (*субмультипликативность* нормы),[1]

то $(X, +, \cdot, \nu)$ называется *нормированным кольцом.* Если же

- $\nu(x_1 \cdot x_2) = \nu(x_1) \cdot \nu(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$ (*мультипликативность* нормы),

то такая норма называется *абсолютным значением.*

Как и в случае метрики, мы рассмотрим пару вариаций определения нормы.

Для $\infty$-нормированной абелевой группы $(X, +, \nu)$ имеется наибольшая нормированная подгруппа $X_f \leqslant X$ с конечной нормой и разбиение из 1.1.1 — это разбиение на смежные классы $x + X_f$, $x \in X$, по подгруппе $X_f$; для $\infty$-нормированного кольца $(X, +, \cdot, \nu)$ такая подгруппа $X_f$ является подкольцом (необязательно с единицей).

Ослабив первую аксиому нормы до условия $\nu(0) = 0$, получаем *полунорму* $\nu$. При этом множество $X_0 := \{x \in X \mid \nu(x) = 0\}$ является подгруппой (идеалом, в случае, когда $X$ — нормированное кольцо), а на $X/X_0$ мы имеем обычную норму, которая и индуцирует исходную полунорму на $X$.

**1.8.13. Упражнение.*** Докажите, что операция сложения/вычитания $X \times X \xrightarrow{\pm} X$ непрерывна для любой нормированной абелевой группы $X$.

Показав, что почленная сумма/разность последовательностей Коши — последовательность Коши, заметьте, что на пополнении $\hat{X}$ имеется структура абелевой группы, причем метрика на $\hat{X}$ является трансляционно инвариантной, а вложение $\iota : X \to \hat{X}$ является гомоморфизмом абелевых групп.

В частности, сложение действительных чисел непрерывно.

[1] Обратите внимание: умножение действительных чисел до сих пор не определено.

**1.8.14. Упражнение.*** Пусть $(X,+,\cdot,\nu)$ — нормированное кольцо. Докажите, что операция умножения $X \times X \xrightarrow{\cdot} X$ непрерывна.

Показав, что почленное произведение последовательностей Коши — последовательность Коши, заметьте, что на пополнении $\hat{X}$ имеется структура кольца, причем соответствующая норма на $\hat{X}$ является субмультипликативной, а вложение $\iota : X \to \hat{X}$ является гомоморфизмом колец.

В частности, мы определили умножение действительных чисел, и это умножение непрерывно.

**1.8.15. Упражнение.** Пусть $(X,+,\cdot,\nu)$ — поле с абсолютным значением. Докажите, что норма на пополнении $\hat{X}$ является абсолютным значением, что пополнение $\hat{X}$ является полем и что функция $X \setminus 0 \xrightarrow{-1} X \setminus 0$, подсчитывающая мультипликативный обратный, является непрерывной.

**1.8.16. Упражнение.** Сформулируйте и докажите утверждения аналогичные упражнению 1.8.10 для нормированных абелевых групп, для нормированных колец и для полей с абсолютным значением.

В литературе все еще используются следующие старинные обозначения.

**1.8.17. Определение.** Обозначим через $\check{\mathbb{R}}$ *расширенное множество вещественных чисел,* то есть множество $\mathbb{R}$ с двумя дополнительными точками $-\infty$ и $\infty := +\infty$. Линейный порядок, абсолютное значение, частичные операции сложения, вычитания, умножения и деления продолжаются на $\check{\mathbb{R}}$ естественным образом, а топология[2] на $\check{\mathbb{R}}$ имеет базу состоящую из открытых в $\mathbb{R}$ сегментов и сегментов вида $[-\infty, r[_{\check{\mathbb{R}}}$ и $]r,\infty]_{\check{\mathbb{R}}}$, где $r \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\mathbb{R}$ — открытое подпространство в $\check{\mathbb{R}}$ и множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел плотно в $\check{\mathbb{R}}$. При этом $\infty - \infty$, $\pm\infty \cdot 0$, и $\pm\infty/\pm\infty$ неопределены.

Эти соглашения позволяют говорить о пределах равных $\pm\infty$ и создают (сомнительные) удобства при манипуляциях с пределами. Тем не менее, принято говорить, что пределы равные $\pm\infty$ *не существуют.* Отметим также, что топология на $\check{\mathbb{R}}$ сильнее топологии $\infty$-метрического пространства, заданного абсолютным значением $|\ |$.

**1.8.18. Определение.** Пусть $\check{\mathbb{R}} \supset S$ — произвольное подмножество. *Точная верхняя грань* или *супремум* множества $S$ — это наименьшая верхняя грань множества $S$, обозначаемая через $\sup S$. Аналогично, *точная нижняя грань* или *инфимум* множества $S$ — это наибольшая нижняя грань множества $S$, обозначаемая через $\inf S$. По определению, $\inf\varnothing := \infty$ и $\sup\varnothing := -\infty$.

**1.8.19. Предложение.** *Для любого подмножества $S \subset \check{\mathbb{R}}$ существуют инфимум и супремум* $\inf S, \sup S \in \check{\mathbb{R}}$.

**Доказательство.**[3] Достаточно установить существование супремума $\sup S$ для непустого подмножества $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}$, обладающего конечной верхней гранью $S \leqslant b \in \mathbb{R}$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует максимальный элемент $q_n \in \mathbb{Z}\cdot 2^{-n}$ такой, что $S \nleqslant q_n$. Ясно, что $S \leqslant q_n + 2^{-n}$, что $q_{n+1} \leqslant q_n + 2^{-n}$ и что $q_n \leqslant q_{n+1}$ (поскольку $\mathbb{Z}\cdot 2^{-n} \subset \mathbb{Z}\cdot 2^{-n-1}$)

[2]Используя функцию $f : [-1,1] \to \check{\mathbb{R}}$, $f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$, мы можем заключить из ???, что пространство $\check{\mathbb{R}}$ гомеоморфно замкнутому интервалу $[-1,1]$.

[3]Заимствовано из книги С.М. Львовского “Лекции по математическому анализу”, МЦНМО, 2008, теорема 3.11, стр. 21.

для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $0 \leqslant q_n - q_m \leqslant 2^{-n+1} + 2^{-n+2} + \cdots + 2^{-m} < 2^{-m+1}$, если $m \leqslant n$. Поэтому $q_n$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность Коши, и мы имеем предел $r := \lim\limits_{n\to\infty} q_n$, причем $q_n \leqslant r$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $r = \sup S$.

Если $r < s \in S$, то $r + 2^{-n} < s$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и $s \in S \leqslant q_n + 2^{-n} \leqslant r + 2^{-n} < s$; противоречие. Следовательно, $S \leqslant r$. Если $S \leqslant b < r$, то $b \leqslant q_n \leqslant r$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, откуда $S \leqslant q_n$; противоречие ∎

**1.8.20.** Вот список часто используемых свойств действительных чисел.

• Действительные числа образуют поле $\mathbb{R}$, полное относительно абсолютного значения $|\ |$, и поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$.
• Поле $\mathbb{R}$ *упорядочено,* то есть на $\mathbb{R}$ задан линейный порядок $\leqslant$ такой, что для любых $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ из $r_1 \leqslant r_2$ следует $r + r_1 \leqslant r + r_2$, а из $0 \leqslant r$ и $r_1 \leqslant r_2$ следует $rr_1 \leqslant rr_2$.
• (*Аксиома Архимеда.*) Для любых положительных действительных чисел $0 < r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ существует натуральное число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $r_1 < n \cdot r_2$.
• Пусть $r_n, r'_n, s_n \in \check{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $r_n \leqslant s_n \leqslant r'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\check{\mathbb{R}} \ni r := \lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} r'_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = r$.
• Для любого подмножества $S \subset \check{\mathbb{R}}$ существуют инфимум и супремум $\inf S, \sup S \in \check{\mathbb{R}}$.
• Для любых подмножеств $S_1, S_2 \subset \check{\mathbb{R}}$ таких, что $S_1 \leqslant S_2$, существует элемент $r \in \check{\mathbb{R}}$ удовлворяющий неравенствам $S_1 \leqslant r \leqslant S_2$.
• Последовательность $r_n \in \check{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел в $\check{\mathbb{R}}$, если $r_n \leqslant r_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ или если $r_{n+1} \leqslant r_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
• Если $S_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, убывающее семейство непустых замкнутых в $\mathbb{R}$ интервалов, то есть $S_n \supset S_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то их пересечение непусто, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n \neq \varnothing$.

**1.8.21. Упражнение.** Пользуясь предложением 1.8.19, докажите последние три свойства из 1.8.20.

**1.8.22. Упражнение.** Подмножество $S \subset \mathbb{R}$ называется *сегментом,* если для любых $r_1, r_2 \in S$ и $r \in \mathbb{R}$ неравенства $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ влекут $r \in S$. Докажите, что все сегменты в $\mathbb{R}$ — это в точности замкнутые, (полу)открытые и (полу)бесконечные интервалы в $\mathbb{R}$, перечисленные в пункте sa1.2.1.

**1.8.23. Упражнение.*** Пусть $\mathbb{R} \supset S_1, S_2 \neq \varnothing$ — непустые подмножества такие, что $r_1 \leqslant S_1$ и $S_2 \leqslant r_2$ для некоторых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\inf S_1 \in \overline{S}_1$ и $\sup S_2 \in \overline{S}_2$.

Докажите, что непустое подпространство в $\mathbb{R}$ является связным тогда и только тогда, когда оно является сегментом.

**1.8.24. Упражнение.** Для произвольной последовательности $r_n \in \check{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, определим ее *нижний* и *верхний пределы* $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n := \lim\limits_{m\to\infty} \inf\{r_n \mid m \leqslant n\}$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} r_n := \lim\limits_{m\to\infty} \sup\{r_n \mid m \leqslant n\}$. (Пределы в правых частях существуют в $\check{\mathbb{R}}$ благодаря предпоследнему свойству из 1.8.20.)

Докажите, что $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} r_n$ являются пределами в $\check{\mathbb{R}}$ подпоследовательностей исходной последовательности и что предел $l$ любой сходящейся в $\check{\mathbb{R}}$ подпоследовательности удовлетворяет неравенствам $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n \leqslant l \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} r_n$.

Покажите, что последовательность $r_n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел в $\check{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n = \limsup\limits_{n\to\infty} r_n$.

**1.8.25. Канторово множество.** По индукции, положим $C_0 := [0,1]$, $C_1 := [0,3^{-1}] \sqcup [2\cdot 3^{-1},1]$, …, $C_n := \bigsqcup\limits_{i=1}^{2^n} I_i$, где $I_i = [b_i,e_i]$ — замкнутый интервал длины $e_i - b_i = 3^{-n}$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant 2^n$. Заменив каждый интервал $I_i = [b_i,e_i]$ на $[b_i, b_i+3^{-n-1}] \sqcup [e_i - 3^{-n-1}, e_i]$ в формуле для $C_n$, получаем определение множества $C_{n+1}$. Ясно, что $C_n \supset C_{n+1}$ и $C_n \subset_C \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому *канторово множество* $C := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ замкнуто в $\mathbb{R}$, $C \subset_C \mathbb{R}$.

**1.8.26. Упражнение.** Докажите, что канторово множество $C$ не имеет изолированных точек, имеет пустую внутренность, $\operatorname{Int} C = \varnothing$, и равномощно $\mathbb{R}$, $|C| = |\mathbb{R}|$.

**1.8.27. Упражнение.** На произведении $X := \prod\limits_{i\in I} X_i$ семейства $(X_i, \mathrm{d}_i)$, $i \in I$, $\infty$-метрических пространств определим $\mathrm{d}\big((x_i)_{i\in I}, (x'_i)_{i\in I}\big) := \sup\big\{\, \mathrm{d}_i(x_i, x'_i) \mid i \in I \big\}$.

Докажите, что $(X, \mathrm{d})$ — $\infty$-метрическое пространство и что проекции $\pi_i : X \to X_i$, $i \in I$, непрерывны.

Верно ли, что топология на $X$ — это топология произведения, если $I$ конечно? А если $I$ бесконечно?

Если каждое $X_i$, $i \in I$, — $\infty$-нормированная абелева группа, то $X$ — $\infty$-нормированная абелева группа. Если каждое $X_i$, $i \in I$, — $\infty$-нормированное кольцо, то $X$ — $\infty$-нормированное кольцо.

Если в последнем случае каждая норма $\nu_i$, $i \in I$, мултипликативна, то верно ли, что норма на $X$ мультипликативна?

**1.8.28. Упражнение.** Пусть $X := \prod\limits_{i\in I} X_i$ — произведение семейства $(X_i, \mathrm{d}_i)$, $i \in I$, полных $\infty$-метрических пространств с $\infty$-метрикой определенной в предыдущем упражнении. Докажите, что $(X, \mathrm{d})$ — полное $\infty$-метрическое пространство. Взяв $|I| = n$ и $X_i = \mathbb{R}$ для всех $i \in I$, получаем полноту пространства $X = \mathbb{R}^n$ с метрикой $L^\infty$.

**1.8.29. Упражнение.** Пусть $(X, \mathrm{d})$ — $\infty$-метрическое пространство, а $Y$ — топологическое пространство. Как в упражнении 1.8.27, на множестве $X^Y$ всех функций из $Y$ в $X$ задана $\infty$-метрика $\mathrm{d}$, называемая *равномерной $\infty$-метрикой* или *$\infty$-метрикой Чебышева* или sup-*$\infty$-метрикой* или *униформной $\infty$-метрикой* или $L^\infty$-*$\infty$-метрикой* или $C^0$-*$\infty$-метрикой.*

Докажите, что подпространство $C^0(Y,X) := \{f \in X^Y \mid f \text{ непрерывна}\}$ замкнуто в $(X^Y, \mathrm{d})$. (Подсказка: если $C^0(Y,X) \ni f_n \to f \in X^Y$, то $\mathrm{d}(f_n, f) \to 0$; кроме того, $\mathrm{d}\big(f(y), f(y_0)\big) \leqslant 2\,\mathrm{d}(f_n, f) + \mathrm{d}\big(f_n(y), f_n(y_0)\big)$.)

В частности, пространство $C_b^0(Y) := \big\{f \in C^0(Y,\mathbb{R}) \mid ||f||_\infty < \infty\big\}$ всех ограниченных непрерывных функций из $Y$ в $\mathbb{R}$ является полным нормированным кольцом относительно sup-нормы заданной формулой $||f||_\infty := \sup\Big\{\big|f(y)\big| \mid y \in Y\Big\}$.

**1.8.30. Определение.** Если вместо неравенства треугольника выполнена более сильная аксиома

- $\mathrm{d}(x_1, x_3) \leqslant \max\big(\mathrm{d}(x_1,x_2), d(x_2,x_3)\big)$ для всех $x_1, x_2, x_3 \in X$ (*сильное неравенство треугольника* или *ультраметрическое неравенство* для метрики), то соответствующее метрическое пространство $(X, \mathrm{d})$ называется *ультраметрическим* или *неархимедовым.*

Аналогично, если вместо неравенства треугольника выполнена аксиома

• $\nu(x_1 + x_2) \leqslant \max\big(\nu(x_1), \nu(x_2)\big)$ для всех $x_1, x_2 \in X$ (*сильное неравенство треугольника* или *ультраметрическое неравенство* для нормы),

то соответствующая нормированная абелева группа $(X, +, \mathrm{d})$ называется *ультраметрической* или *неархимедовой.*

**1.8.31. Упражнение.** Докажите следующие утверждения для ультраметрического пространства $(X, \mathrm{d})$.

• Если $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3$ — попарные расстояния между тремя точками из $X$, то $d_2 = d_3$ (все треугольники равнобедренные).
• Любая точка открытого или замкнутого шара является его центром.
• Если два шара (каждый может быть открытым или замкнутым) пересекаются, то один из них содержится в другом.
• Любой замкнутый шар является открытым множеством.
•* Любой открытый шар является замкнутым множеством.
•* Пополнение $(\hat{X}, \mathrm{d})$ является ультраметрическим пространством.

**1.8.32. Пример.** Пусть $\mathbb{N} \ni p$ — простое число. Каждое ненулевое рациональное число $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ записывается в виде $q = p^z \frac{n}{d}$, где $\mathbb{Z} \ni n, d$ не делятся на $p$ и $z \in \mathbb{Z}$. Определив $\nu_p(q) := p^{-z}$ и $\nu_p(0) := 0$, мы получаем ультраметрическое *$p$-адическое абсолютное значение* $\nu_p$ на $\mathbb{Q}$ и на $\mathbb{Z}$. Очевидно, $\mathbb{Z}$ — это замкнутый шар радиуса 1 в $\mathbb{Q}$, а $\mathbb{Z}p$ — это открытый шар радиуса 1 в $\mathbb{Q}$.

Пополнение $\mathbb{Q}_p$ поля $\mathbb{Q}$ относительно абсолютного значения $\nu_p$ называется *полем $p$-адических чисел,* а пополнение $\mathbb{Z}_p$ кольца $\mathbb{Z}$ относительно $\nu_p$ — это *кольцо целых $p$-адических чисел.*

Поскольку все точки множества $S := \nu_p\mathbb{Q} = \{p^z \mid z \in \mathbb{Z}\} \cup 0$, кроме точки 0, являются изолированными, то $\nu_p\mathbb{Q}_p = S$, откуда уже нетрудно заключить, что $\mathbb{Z}_p p$ — это открытый шар радиуса 1, $\mathbb{Z}_p$ — это замкнутый шар радиуса 1 и $\mathbb{Q}_p = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p p^{-n}$.